Série U.
N° d'ordre :
21

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE STRASBOURG

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

Par M. Jacques BERGE

CAPITAINE D'ARTILLERIE

1re THÈSE. — Quelques applications de l'hydrodynamique.

2e THÈSE. — Propositions données par la Faculté.

---

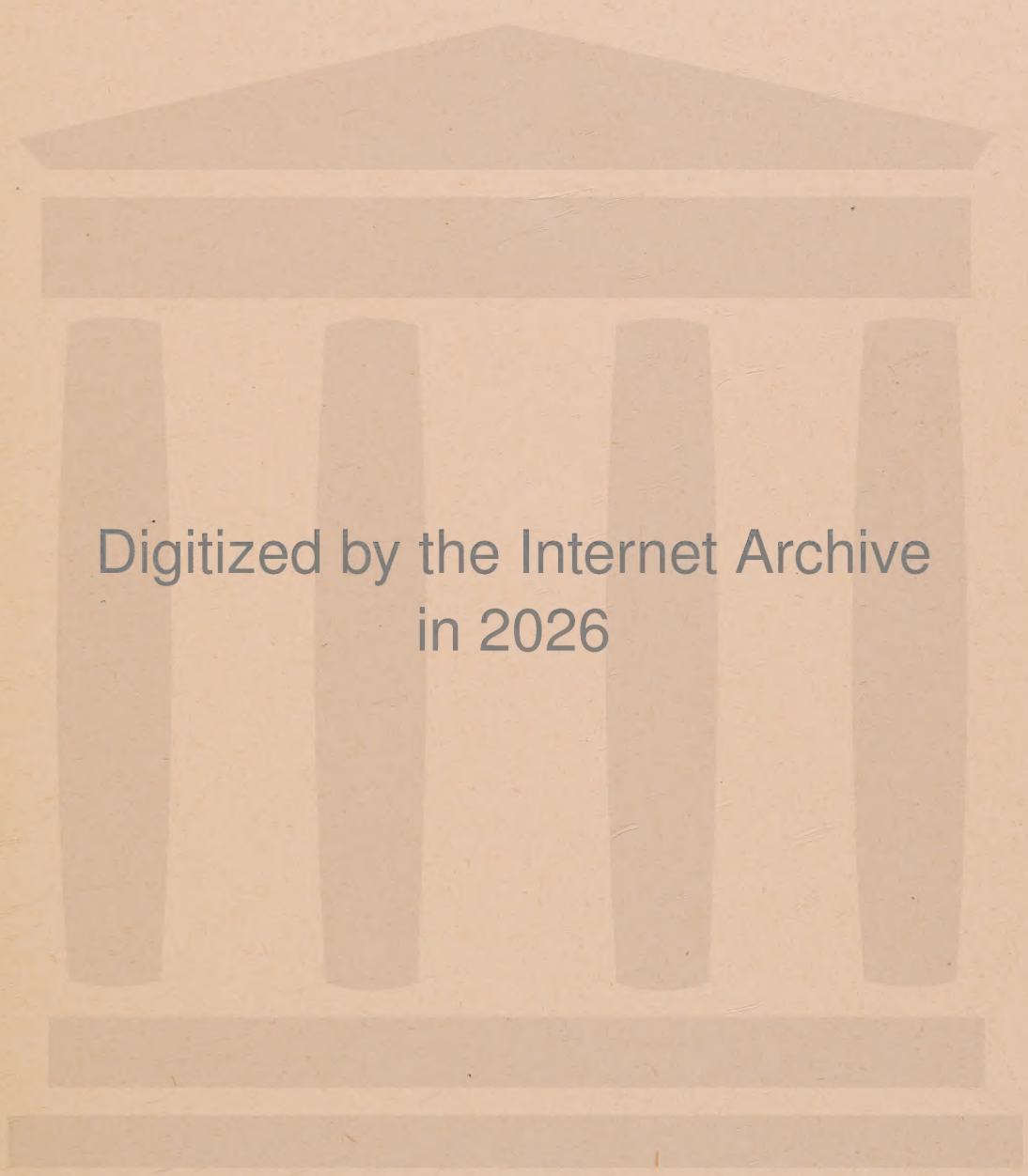
10 MAI 1926

Soutenues en juin 1925, devant la Commission d'examen.

MM. ESCLANGON, *Président.*
VILLAT, *Examinateurs.*
THIRY, *Examinateurs.*

TOULOUSE
IMPRIMERIE ET LIBRAIRIE ÉDOUARD PRIVAT
Librairie de l'Université.
14, RUE DES ARTS, 14 (SQUARE DU MUSÉE, TOULOUSE)

1925


Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550001_0017

Série U.
N° d'ordre :
21

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE STRASBOURG

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

Par M. Jacques BERGE

CAPITAINE D'ARTILLERIE

1re THÈSE. — Quelques applications de l'hydrodynamique.

2e THÈSE. — Propositions données par la Faculté.

---

10 MAI 1926

Soutenues en juin 1925, devant la Commission d'examen.

MM. ESCLANGON, *Président.*
VILLAT, THIRY, *Examinateurs.*

TOULOUSE
IMPRIMERIE ET LIBRAIRIE ÉDOUARD PRIVAT
Librairie de l'Université.
14, RUE DES ARTS, 14 (SQUARE DU MUSÉE, TOULOUSE)

1925

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

PERSONNEL

MM.

Doyen.....	P. MULLER.....	Professeur de chimie générale et de chimie physique.
Doyen honoraire....	E. BATAILLON.	
Professeurs.....	X.....	Mathématiques générales.
	G. VALIRON.....	Calcul différentiel et intégral.
	H. VILLAT.....	Mécanique.
	M. FRÉCHET.....	Analyse supérieure.
	E. ESCLANGON.....	Astronomie.
	P. WEISS.....	Physique générale.
	H. OLLIVIER.....	Physique générale.
	E. ROTHÉ.....	Physique du globe.
	L. HACKSPILL.....	Chimie minérale.
	H. GAULT.....	Chimie organique.
	E. TOPSENT.....	Zoologie et anatomie comparée.
	C. HOUARD.....	Botanique.
	E. TERROINE.....	Physiologie générale.
	J. DE LAPPARENT...	Pétrographie.
	M. GIGNOUX.....	Géologie et paléontologie.
	E. CHATTON.....	Biologie générale.
	E. BAUER.....	Physique mathématique.
	E. CORNEC.....	Chimie appliquée.
	H. LABROUSTE.....	Physique du globe.
	G. RIBAUD.....	Physique générale.
	F. VLÈS.....	Physique biologique.
Secrétaire.....	E. BONTEMS.	

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

A LA MÉMOIRE DE MON FRÈRE

LE CAPITAINE PAUL BERGE

MORT POUR LA FRANCE

PREMIÈRE THÈSE

QUELQUES APPLICATIONS DE L'HYDRODYNAMIQUE

Par M. JACQUES BERGE

CAPITAINE D'ARTILLERIE

INTRODUCTION

Je n'ai pas besoin de rappeler ici quel vaste champ les travaux de M. H. Villat ont ouvert aux chercheurs, ni comment ils donnent, à la fois, des procédés de calcul à l'analyse, et à l'hydrodynamique des aperçus nouveaux, aussi féconds les uns que les autres.

J'ai été tenté d'appliquer à quelques exemples simples ces nouveaux procédés de raisonnement, pour montrer combien leur maniement est facile et quels services ils peuvent rendre aux ingénieurs et aux praticiens.

Mon attention avait été attirée sur certaines questions que M. H. Vergne a exposées de la façon la plus attrayante dans un article du *Bulletin des Sciences mathématiques* (sept.-oct. 1920), et j'ai formé le projet de les reprendre en utilisant les outils mis à ma disposition par M. H. Villat. Le lecteur verra que j'ai pu généraliser plusieurs des résultats acquis par M. H. Vergne et en présenter quelques autres sous un aspect tout à fait nouveau. Le principal intérêt de cette étude n'est pas dans les résultats eux-mêmes, mais dans la généralité de la méthode qui a permis de les obtenir.

La première partie traite de la dépression instantanée qui se produit dans un liquide lorsqu'on découvre brusquement un orifice percé dans la paroi du vase qui le contient. Cette étude permet de déterminer les accélérations initiales des particules du liquide et d'indiquer avec certitude les cas dans lesquels l'accélération au bord de l'orifice est infinie. On sait que, dans ces cas, le débit initial du jet est

exclusivement formé par les particules liquides situées aux bords de l'orifice. Enfin un calcul long, mais facile, me permet d'obtenir l'expression de la poussée totale subie par les parois du vase au moment de l'ouverture de l'orifice.

Dans la deuxième partie, j'étudie la compression instantanée d'un liquide et, plus précisément, les percussions produites dans la masse du liquide par le choc, sur la surface, d'un objet plat tombant verticalement. J'ai traité complètement le problème dans le cas d'un objet circulaire (pièce de monnaie, par exemple) et montré comment la méthode employée s'appliquerait au cas d'un objet long et étroit (planche) et permet de retrouver des résultats déjà connus. Le calcul introduit l'équation de Laplace, qui s'intègre facilement grâce à un choix convenable du système de coordonnées. Une simple remarque indique comment on pourrait passer du cas de la chute verticale à celui de la chute oblique, produisant le ricochet.

Enfin, dans une troisième partie, j'apporte ma modeste contribution à l'étude d'un problème déjà traité par M. U. Cisotti (*Rend. del Circ. di Palermo*, t. XXV, 1908, pp. 145-179), celui de l'écoulement d'un liquide à travers un vase dont le profil affecte la forme connue sous le nom de « tube de Borda ». Comme beaucoup de ces mouvements d'écoulement, celui-ci présente une infinité de solutions possibles, et l'on se trouve devant l'un de ces cas de solutions multiples, signalés pour la première fois par M. H. Villat (Cf. Sur la détermination des problèmes d'hydrodynamique relatifs à la résistance des fluides, *Ann. de l'École normale*, 1914, p. 455).

Qu'il me soit permis d'exprimer ici toute ma reconnaissance à mon maître M. H. Villat, qui a bien voulu, malgré ses occupations absorbantes, s'intéresser à mon modeste travail et m'aider de ses précieux conseils et de ses encouragements affectueux.

PREMIÈRE PARTIE

DÉPRESSION INSTANTANÉE DANS UN LIQUIDE

§ 1. — Formules générales.

Lorsque l'on découvre brusquement un orifice percé dans la paroi d'un vase contenant un liquide, la pression des éléments liquides placés à l'orifice prend instantanément la valeur de la pression atmosphérique; il en résulte une dépression qui se transmet dans toute la masse liquide et provoque une brusque diminution de la poussée que le liquide exerçait sur les parois.

C'est cette dépression que nous nous proposons d'étudier. Nous nous bornerons au cas des mouvements parallèles à un plan fixe, ce qui rendra les calculs moins arides et permettra de les pousser plus loin. Les résultats ne seront pas modifiés d'une façon essentielle. Également dans un but de simplification, nous prendrons la densité du liquide égale à l'unité.

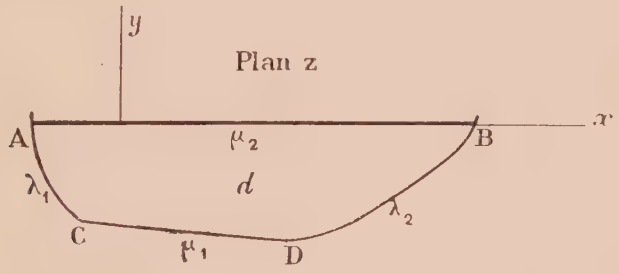


Fig. 1.

Soit donc ACDB la section droite du vase, que nous supposons formé par un cylindre horizontal assez long pour que le mouvement soit identique dans toutes les sections droites. L'orifice sera la portion de paroi cylindrique comprise entre les deux génératrices C et D. Avec les notations usuelles de l'hydrodynamique, les

équations d'Euler et l'équation de continuité s'écrivent dans le cas du mouvement à deux dimensions :

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = X - \dfrac{\partial u}{\partial t} - u\dfrac{\partial u}{\partial x} - v\dfrac{\partial u}{\partial y} = X - u', \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = Y - \dfrac{\partial v}{\partial t} - u\dfrac{\partial v}{\partial x} - v\dfrac{\partial v}{\partial y} = Y - v'. \end{cases}$$

$$(2)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Ici la seule force est la pesanteur et les vitesses sont nulles, *à l'instant considéré;* on a donc(1) :

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = -u', \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = -g - v', \end{cases}$$

$$u' = \frac{du}{dt},$$

$$v' = \frac{dv}{dt},$$

et l'équation (2) donne, par dérivation :

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0$$

c'est-à-dire, en vertu des équations (3) :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(p + gy) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(p + gy) = 0.$$

Posant $p + gy = H$, nous aurons $\Delta H = 0$.

La fonction H est donc une fonction harmonique; il est possible de la déterminer dans le domaine d, car nous connaissons les valeurs qu'elle prend sur certaines parties de la frontière et les valeurs que prend sa dérivée normale sur les autres parties. En effet, sur l'orifice μ_1, p est égal à la pression atmosphérique et gy est donné par la forme de la paroi et par la distance de ses points à la surface libre; sur la surface libre μ_2, p est également la pression atmosphérique et gy est

(1) Indiquons ici, avec M. Langevin et M. Vergne, la liaison étroite qui existe entre la pression et l'accélération.

nul. Sur les parois conservées λ_1 et λ_2, l'accélération est tangente à la paroi, d'où il résulte que la dérivée normale de son potentiel H est nulle. Cette dernière circonstance, très particulière, va nous permettre de modifier le problème en le rendant plus facile, grâce à l'introduction d'une représentation conforme du domaine d.

Nous avons évidemment le droit de supposer que p représente l'excès de la pression sur la pression atmosphérique; et, dans ces conditions, H sera nul sur μ_2 et égal à gy sur μ_1, tandis que, sur λ_1 et sur λ_2, on aura :

$$\frac{\partial H}{\partial n} = 0 .$$

Pour déterminer cette fonction H, nous lui adjoindrons une fonction harmonique conjuguée H', ceci afin que la fonction $H + iH'$ soit une fonction analytique. Nous aurons donc :

$$\frac{\partial H}{\partial s} = \frac{\partial H'}{\partial n}$$

et comme, sur les parois λ_1 et λ_2, on a

$$\frac{\partial H}{\partial n} = 0 ;$$

il en résulte

$$\frac{\partial H'}{\partial s} = 0$$

d'où, sur ces parois :

$$H' = \text{Cte.}$$

Comme nous le verrons par la suite, la fonction H' n'intervient que par ses dérivées et par la différence des valeurs, respectivement constantes, qu'elle prend sur λ_1 et sur λ_2. Nous pouvons donc choisir ces valeurs arbitrairement, soit zéro sur λ_1 et a sur λ_2, a étant lié à la largeur de l'orifice CD et à la forme du vase par la relation

$$a = \int_{\lambda_1} \frac{\partial H'}{\partial s} ds .$$

Dès lors le problème proposé se ramène simplement à la détermination, dans un domaine d, d'une fonction analytique $H + iH'$, connaissant les valeurs que prend sa partie réelle H sur certaines frontières du domaine et les valeurs que prend sa partie imaginaire H' sur le reste des frontières.

Ce problème est un de ceux dont la solution complète a été exposée et explicitée

par M. H. Villat, dans un Mémoire sur la résolution de certaines équations intégrales (*Acta mathematica*, t. XL, pp. 103-178).

Les formules données par M. Villat s'appliquant au cas d'un domaine soit annulaire, soit rectangulaire, nous devons, pour les appliquer, employer une représentation conforme et faire correspondre, par exemple, au domaine d du plan z, un domaine D d'un plan Z, puis chercher dans ce nouveau plan la fonction transformée de la fonction $H + iH'$.

Cette représentation conforme sera plus ou moins fecile à exprimer suivant les cas, mais nous sommes assurés qu'elle existe si la section du vase constitue un domaine d d'un seul tenant. Nous nous occuperons plus tard de rechercher la fonction $Z(z)$ qui la définit.

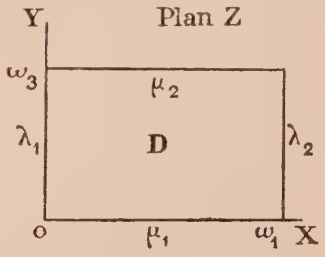


Fig. 3.

Pour le moment, supposons le domaine D du plan Z constitué par un rectangle ayant un sommet à l'origine, le côté réel correspondant à la paroi amovible μ_1. Appelons ω_1 la longueur commune des côtés horizontaux de ce rectangle et $\frac{\omega_3}{i}$ la longueur des côtés verticaux. Nous prendrons ω_1 et ω_3 comme périodes d'une fonction elliptique pu et toutes les fonctions que nous emploierons jusqu'à nouvel ordre seront déduites de cette fonction pu.

Le côté inférieur du rectangle ($Y = 0$, $0 < X < \omega_1$) correspondant à la paroi amovible μ_1, nous désignerons par $\Phi(X)$ la valeur de gy en un point de cette paroi, exprimée en fonction de l'abscisse du point correspondant dans le plan Z.

Ceci posé, nous n'aurons qu'à appliquer la formule donnée par M. Villat dans son Mémoire (*Loc. cit.*, p. 156) en y remplaçant simplement par $\Phi(X)$, a, zéro et zéro les valeurs que prennent alternativement H et H' sur les parois μ_1, λ_2, μ_2, λ_1, et nous trouvons

$$H + iH' = \frac{i}{\pi}\int_0^{\omega_1} \Phi(t)\,[\zeta(Z-t)+\zeta(Z+t)]\,dt - \frac{i}{\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} a[\zeta(Z-it)+\zeta(Z+it)]\,dt$$

d'où

$$H + iH' = \frac{i}{\pi}\int_0^{\omega_1} \Phi(t)\,[\zeta(Z-t+\zeta(Z+t)]\,dt - \frac{2a\eta_3}{\pi}Z \qquad (4)$$

avec la condition

$$\int_0^{\omega_1} \Phi(t)\,dt = \frac{i\omega_2}{i} \tag{5}$$

qui exprime l'uniformité de la fonction dans le domaine.

De l'équation (5) il résulte que a est négatif comme $\Phi(t) = gy$.

Les équations (3) peuvent s'écrire, comme nous l'avons vu,

$$u' = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

$$v' = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{\partial H'}{\partial x}$$

ce qui donne

$$u' - iv' = -\frac{\partial H}{\partial x} + i\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{\partial H}{\partial x} - i\frac{\partial H'}{\partial x}$$

et de là

$$u' - iv' = -\frac{d(H + iH')}{dZ}\frac{dZ}{dz}. \tag{6}$$

Si on pose

$$P + iQ = -\frac{d(H + iH')}{dZ},$$

on aura

$$u' - iv' = (P + iQ)\frac{dZ}{dz}. \tag{7}$$

Les fonctions P et Q dépendent de la forme de la paroi amovible par l'intermédiaire de $\Phi(t)$; $\frac{dZ}{dz}$ dépend de la forme de la section du vase; c'est cette fonction qui définit la représentation conforme du plan z sur le plan Z et qui fait correspondre le domaine D au domaine d.

Pour déterminer commodément cette représentation conforme et expliciter la fonction $\frac{dZ}{dz}$, nous emploierons un procédé très ingénieux indiqué également par M. Villat dans un autre Mémoire (H. Villat, Sur la représentation des aires doublement connexes, *Ann. de l'Éc. normale*, juin 1921) pour la résolution de problèmes analogues. Ce procédé consiste à utiliser une interprétation mécanique, qui facilite et rend naturelle la marche des calculs en les rapportant à l'étude du mouvement d'un fluide.

Imaginons que nous étendions sur chacun des domaines d et D une couche de fluide homogène, non tourbillonnaire, de densité 1, animée d'un mouvement permanent. Choisissons ce mouvement de telle sorte que, dans le domaine D, parcouru de gauche à droite, les côtés horizontaux du rectangle soient des lignes de courant et les côtés verticaux des lignes équipotentielles. Ce mouvement est évidemment réalisable; la représentation conforme de D sur d lui fait correspondre un mouvement analogue du fluide étendu sur le domaine d; ce mouvement n'est peut-être pas réalisable physiquement, mais *du point de vue du calcul*, son existence est assurée par l'existence de la fonction $z(Z)$.

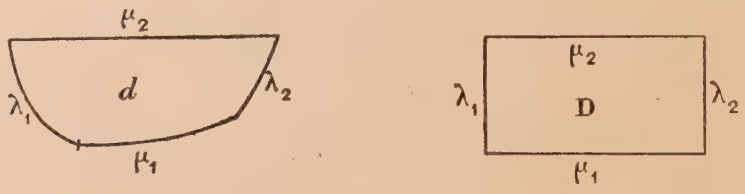


FIG. 3.

Quoi qu'il en soit, appelons φ le potentiel des vitesses du fluide dans le plan z qui contient le domaine d; zéro et φ_1 les valeurs de cette fonction sur λ_1 et λ_2 respectivement; ψ la fonction de courant; zéro et ψ_1 les valeurs qu'elle prend sur μ_1 et sur μ_2.

Posons

$$f = \varphi + i\psi$$

d'où

$$\frac{df}{dz} = u - iv$$

en appelant u et v les projections sur les axes de la vitesse du fluide en un point.

Si nous posons

$$\frac{dz}{df} = e^{-i\Omega} = e^{T-i\Theta} = e^{T}(\cos\Theta - i\sin\Theta),$$

nous voyons que T est le logarithme de la vitesse au point d'affixe z et que Θ est l'angle que cette vitesse fait avec ox.

Or la vitesse, d'après les hypothèses faites, est tangente à la frontière si le point z est sur μ_1 ou sur μ_2, et normale à la frontière si le point z est sur λ_1 ou sur λ_2. Donc, si nous connaissons la forme du vase, nous connaissons la partie réelle Θ de Ω sur toutes les frontières du domaine d.

Appelons $F_1(t)$, $F(t)$, $F_2(t)$ la suite des valeurs de l'inclinaison sur ox de la tangente à la paroi, orientée dans le sens direct; lorsque le point z parcourt respecti-

vement les parois λ_1, μ_1 et λ_2, la paroi λ_1 étant parcourue dans le sens AC (*fig. 1*), c'est-à-dire dans le sens des Y croissant (dans le plan Z), les parois μ_2 et λ_2 dans le sens opposé.

Les valeurs de Θ sont :

sur λ_1	$F_1(t) + \frac{\pi}{2}$	(normale intérieure)
sur μ_1	$F(t)$	
sur λ_2	$F_2(t) - \frac{\pi}{2}$	(normale extérieure)
sur μ_2	0	

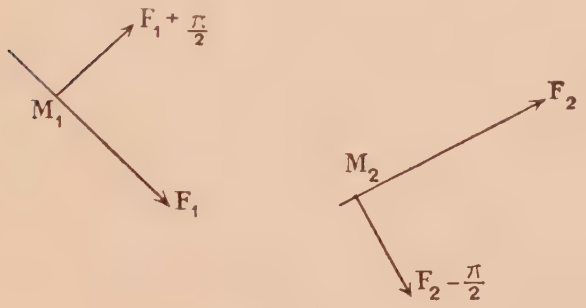


FIG. 4.

et une autre formule du même Mémoire de M. Villat (*Acta math.*, t. XL, p. 153), auquel nous avons déjà eu recours pour la fonction $H + iH'$, nous donnera la fonction Ω. En effet, nous connaissons la partie réelle de Ω en chaque point de la frontière d'un rectangle de dimensions φ_1 et ψ_1. Nous poserons

$$\omega_1 = \varphi_1$$
$$\omega_3 = i\psi_1$$

et nous construirons avec les périodes ω_1 et ω_3 une fonction elliptique pu.

Dans ces conditions, la formule de M. Villat donne :

$$\Omega = \frac{i}{\pi}\int_0^{\varphi_1} F(t)\,[\zeta(Z-t) - \zeta(Z+t)]\,dt - \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\psi_2}{i}} \left(F_2(t) - \frac{\pi}{2}\right)[\zeta_1(Z-it) - \zeta_1(Z+it)]\,dt$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\psi_1}{i}} \left(F_1(t) + \frac{\pi}{2}\right)[\zeta(Z-it) - \zeta(Z+it)]\,dt.$$

$$\Omega = \frac{i}{\pi}\int_0^{\varphi_1} F(t)\,[\zeta(Z-t) - \zeta(Z+t)]\,dt - \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\psi_2}{i}} F_2(t)\,[\zeta_1(Z-it) - \zeta_1(Z+it)]\,dt$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\psi_1}{i}} F_1(t)\,[\zeta(Z-it) - \zeta(Z+it)]\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\psi_2}{i}} [\zeta(Z-it) - \zeta(Z+it) + \zeta_1(Z-it) - \zeta_1(Z+it)]\,dt.$$

Le dernier terme s'écrit :

$$\frac{i}{2}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} [\zeta(it-Z)+\zeta(it+Z)+\zeta_1(it-Z)+\zeta_1(it+Z)]\,idt$$

ou, après intégration,

$$\frac{i}{2}\operatorname{Log}\frac{\sigma_1(\omega_3-Z)\,\sigma_1(\omega_3+Z)\,\sigma(\omega_3-Z)\,\sigma(\omega_3+Z)}{-\sigma^2 Z\,\sigma^2_1 Z}$$

ou

$$\frac{i}{2}\operatorname{Log}\frac{-\sigma^2\omega_3\,\sigma^2_1\omega_3\,\sigma^2_2 Z\,\sigma^2_3 Z}{\sigma^2_1 Z\,\sigma^2 Z}.$$

La constante $\sigma\omega_3$ est imaginaire pure; $\sigma_1\omega_3$ est réel; donc le produit $\sigma^2\omega_3\,\sigma^2_1\omega_3$ est négatif et on peut poser

$$-\sigma^2\omega_3\,\sigma^2_1\omega_3 = N^2,$$

N étant réel et égal à (T. et M. XXXI 1)(1)

$$N = \frac{\omega_1}{2\pi}\frac{q^2_2 q^2_3}{q^2_0 q^2_1 q^{\frac{1}{2}}}\,e^{\eta_3\omega_3} > 0. \tag{8}$$

Le dernier terme de Ω s'écrit alors :

$$i\operatorname{Log} N\frac{\sigma_2 Z\,\sigma_3 Z}{\sigma Z\,\sigma_1 Z}.$$

Il est inutile d'expliciter la détermination du logarithme, puisque c'est la fonction $e^{-i\Omega}$ qui seule importe ici.

D'autre part, les hypothèses faites, en particulier le choix des périodes $2\omega_1$ et $2\omega_3$, entraînent l'identité des fonctions f et Z, et on a

$$\frac{dZ}{dz} = e^{-i\Omega}$$

---

(1) J'adopterai les notations du Traité de Tannery et Molk sur les fonctions elliptiques (Gauthier-Villars, 4 volumes) et je rappellerai leurs formules par le double numéro qui les désigne dans cet ouvrage, précédé des lettres T. et M.

Ce qui fait que la représentation conforme du plan z sur le plan Z s'exprime par la fonction $Z(z)$, solution de l'équation différentielle

$$(9)\quad \frac{dZ}{dz} = N\frac{\sigma_2 Z\,\sigma_3 Z}{\sigma Z\,\sigma_1 Z}\,e^{\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_2} F_1(t)\,[\zeta(Z-t)-\zeta(Z+t)]\,dt + \frac{i}{\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} F_2(t)\,[\zeta_1(Z-it)-\zeta_4(Z+it)]\,dt}$$

$$-\frac{i}{\pi}\int_0^{\frac{\omega_4}{i}} (F_3(t)\,[\zeta(Z-it)-\zeta(Z+it)]\,dt.$$

Les équations (4), (6) et (9) résolvent le problème proposé dans le cas le plus général.

La connaissance de la forme du vase et de la position de l'orifice, en explicitant les fonctions $F(t)$, $F_1(t)$, $F_2(t)$ et $\Phi(t)$, permettra, dans des cas très simples, de pousser les calculs jusqu'au bout.

Remarquons ici que les fonctions $F(t)$ et $\Phi(t)$ dépendent toutes les deux de la forme de la paroi μ_1 et ne sont pas par conséquent indépendantes l'une de l'autre.

On a

$$\Phi(t) = gy$$

$$F(t) = \operatorname{arctg}\frac{dy}{dx}$$

d'où

$$\Phi'(t)\frac{dt}{dx} = g\frac{dy}{dx} = g\ \operatorname{tang} F(t)$$

$$\Phi'(t) = g\ \operatorname{tang} F(t)\frac{dx}{dt}$$

et on sait que $\dfrac{dx}{dt}$ est la partie réelle de $\left(\dfrac{dz}{dZ}\right)_{Y=0}$.

En particulier, si la paroi μ_1 est plane et horizontale, à la distance h de la surface libre μ_2, on a

$$\Phi(t) = -gh,$$

$$\Phi'(t) = 0,$$

$$F(t) = 0.$$

Cette remarque suppose que la fonction $\dfrac{dZ}{dz}$ a un sens pour $Y=0$, ou, d'une façon plus générale, lorsque le point z se trouve sur l'une des frontières du domaine. C'est bien ce qui résulte des calculs exposés dans le Mémoire cité et dont la formule appliquée par nous n'est que la conclusion (1), et la fonction Ω, dont la partie réelle est connue sur les frontières, a pour coefficient de i les expressions suivantes :

(1) Et qui sont des conséquences directes du Mémoire fondamental consacré par M. Villat à la solution du problème de Dirichlet dans une aire annulaire (*Rendiconti del Circolo d Palermo*, XXXIII, 1912, 1er semestre).

1° sur λ_1, c'est-à-dire pour $Z = iY$,

$$T_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_1} F(t)\,[\zeta(iY - t) - \zeta(iY + t)]\,dt - \frac{1}{i\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} F_2(t)\,[\zeta_1(iY - it) - \zeta_1(iY + it)]\,dt$$

$$+ \frac{1}{i\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} F_1(t)\,[\zeta(iY - it) - \zeta(iY + it)]\,dt + \operatorname{Log}\left|N\frac{\sigma_2 iY\,\sigma_3 iY}{\sigma iY\,\sigma_1 iY}\right|.$$

2° sur μ_1, c'est-à-dire pour $Z = X$,

$$T_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_1} F(t)\,[\zeta(X - t) - \zeta(X + t)]\,dt - \frac{1}{i\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} F_2(t)\,[\zeta_1(X - it) - \zeta_1(X + it)]\,dt$$

$$+ \frac{1}{i\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} F_1(t)\,[\zeta(X - it) - \zeta(X + it)]\,dt + \operatorname{Log} N\frac{\sigma_2 X\,\sigma_3 X}{\sigma X\,\sigma_1 X}.$$

3° sur λ_2, c'est-à-dire pour $Z = \omega_2 + iY$,

$$T_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_1} F(t)\,[\zeta_1(iY - t) - \zeta_1(iY + t)]\,dt - \frac{1}{i\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} F_2(t)\,[\zeta(iY - it) - \zeta(iY + it)]\,dt$$

$$+ \frac{1}{i\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} F_1(t)\,[\zeta_1(iY - it) - \zeta_1(iY + it)]\,dt + \operatorname{Log}\left|-N\frac{\sigma_2 iY\,\sigma_3 iY}{\sigma iY\,\sigma_1 iY}\right|.$$

Certaines intégrales, parmi celles qui sont contenues dans ces expressions, la dernière pour T_1, la première pour T_0, la deuxième pour T_2, sont prises le long d'un chemin d'intégration qui passe par un pôle de l'élément différentiel. L'indétermination qui en résulte n'est qu'apparente et disparaît quand on effectue l'intégration correspondante, à la condition de considérer ces intégrales comme égales à leur valeur principale au sens de Cauchy.

§ 2. — Étude de l'accélération près des bords de l'orifice.

Si la solution du problème proposé ne peut pas être poussée plus loin sans diminuer la généralité des résultats du paragraphe précédent, il est tout de même possible, sans particulariser le problème, de déduire des formules que nous venons d'établir la valeur que prend l'accélération initiale du liquide au bord de l'orifice. Comme la vitesse initiale est nulle, il est important de vérifier si l'accélération est

toujours infinie en un bord, car c'est dans ces conditions seulement que l'on peut conclure que tout le débit initial fourni par l'orifice provient du bord.

Pour simplifier le calcul, nous choisissons le bord C (*fig. 1*), qui correspond à l'origine du plan Z dans la représentation conforme employée au paragraphe précédent. Le calcul se ferait aussi pour le bord D et donnerait évidemment les mêmes résultats intrinsèques.

Nous allons donc étudier ce que devient, au voisinage du point $Z=0$, le second membre de l'équation (6)

$$(6)\qquad u'-iv'=\ldots\frac{d\Pi-i\Pi'_1}{dZ}\frac{dZ}{dz}.$$

Il est bien connu que l'allure de la fonction Ω en un point Z voisin de la frontière du domaine D ne dépend que de la valeur que prend cette fonction aux points de la frontière les plus voisins du point Z(¹). Les parties les plus éloignées concourent seulement à la formation d'un terme additif indépendant de la distance du point Z à la frontière voisine et de la forme de celle-ci. On peut donc, dans l'équation (9), remplacer $F(t)$ et $F_1(t)$ par leurs valeurs au point A et négliger $F_2(t)$, à condition de multiplier par une constante indéterminée la valeur de $\frac{dZ}{dz}$, telle qu'elle sera donnée par le second membre ainsi transformé.

Si donc nous appelons λ et λ_1 les inclinaisons sur ox des tangentes en C aux parois c_1 et c_2, prises l'une et l'autre dans le sens direct, c'est-à-dire les valeurs de $F_1(t)$ et de $F(t)$ pour $t=0$, l'équation (9) montre que, quand Z tend vers zéro, $\frac{dZ}{dz}$ a même limite que

$$A\ \text{limite}\ \frac{z_2Z\,z_1Z}{zZ\,z_1Z}e^{\frac{i\lambda_0}{\pi}}\int_{\ldots}^{\ldots}\ldots\,dt-i\frac{\lambda_1}{\pi}\int_{\ldots}^{\frac{z_2}{t}}\ldots\,dt.$$

Comme on a

$$\int_{\ldots}^{\ldots}\ldots\,dt=\ldots\frac{z_2Z}{z_1Z},$$

$$i\int_{\ldots}^{\frac{z_2}{t}}\ldots\,dt=\log\frac{-z_2Z}{z_2\ldots z_1Z},$$

(¹) Par exemple, H. Villat, *Bulletin de la Société mathématique*, 1911, p. 451.

on trouve

$$\lim \frac{dZ}{dz} = A \lim \left[\frac{\sigma_0 Z\, \sigma_3 Z}{\sigma Z\, \sigma_1 Z} \left(\frac{-\sigma^2 Z}{\sigma^2 \omega_1\, \sigma^2_1 Z} \right)^{\frac{\vartheta_0}{\pi}} \left(\frac{-\sigma^2 Z}{\sigma^2 \omega_2\, \sigma^2_2 Z} \right)^{-\frac{\vartheta_1}{\pi}} \right]$$

$$= A_1 \lim (\sigma Z)^{-1 + \frac{i\vartheta_0}{\pi} - \frac{2\vartheta_1}{\pi}}$$

$$= A_1 \lim Z^{-1 + \frac{i}{\pi}(\vartheta_0 - \vartheta_1)}$$

et le coefficient A_1 est réel et positif, puisque l'allure de la fonction $\frac{dZ}{dz}$ n'est pas modifiée. Nous pouvons remarquer que l'indétermination apparente pour $Z = 0$ des intégrales contenues dans $\frac{dZ}{dz}$ a disparu dans le calcul.

Étudions maintenant ce que devient l'expression

$$P + iQ = -\frac{d(H + iH')}{dZ}$$

au voisinage du point $Z = 0$.

Nous avons

$$(4) \qquad H + iH' = \frac{i}{\pi} \int_0^{\omega_1} \Phi(t) \left[\zeta(Z - t) + \zeta(Z + t) \right] dt - \frac{2a\eta_{13}}{\pi} Z$$

d'où

$$\frac{d}{dZ}(H + iH') = -\frac{i}{\pi} \int_0^{\omega_1} \Phi(t) \left[p(Z - t) + p(Z + t) \right] dt - \frac{2a\eta_{13}}{\pi}.$$

Intégrons par parties l'intégrale du deuxième membre.

Nous avons :

$$\int_0^{\omega_1} \Phi(t) \left[p(Z - t) + p(Z + t) \right] dt = -\Phi(\omega_1) \left[\zeta(\omega_1 - Z) + \zeta(\omega_1 + Z) \right]$$

$$+ \int_0^{\omega_1} \Phi'(t) \left[\zeta(t - Z) + \zeta(t + Z) \right] dt$$

$$= -2\eta_1 \Phi(\omega_1) + \int_0^{\omega_1} \Phi'(t) \frac{d}{dt} \log \left[\sigma(t - Z)\, \sigma(t + Z) \right] dt$$

et, en intégrant encore par parties,

$$\int_0^{\omega_1} \Phi(t) \left[p(Z - t) + p(Z + t) \right] dt = -2\eta_1 \Phi(\omega_1) + \Phi'(\omega_1) \log \left[\sigma(\omega_1 - Z)\, \sigma(\omega_1 + Z) \right] - \Phi'(+0) \log \sigma^2 Z$$

$$+ (2\lambda + 1)\, i\pi \Phi'(+0) - \int_0^{\omega_1} \Phi''(t) \log \left[\sigma(t - Z)\, \sigma(t + Z) \right] dt$$

où $\Phi'(+o)$ représente la valeur que prend $\Phi'(t)$ quand t tend vers zéro par valeurs positives.

La valeur de λ demande à être déterminée avec précision, car elle servira, dans la suite du calcul, à donner le signe de la quantité u' projection sur ox de l'accélération en un point du liquide près du bord de l'orifice. On peut ramener son calcul à celui de la détermination du logarithme dans l'intégration

$$(10)\qquad \int_0^{\omega_1} \zeta(t-Z)\,dt = -\eta_1 Z + \log\sigma\omega_1 + \log\sigma_1 Z - \log\sigma Z + (2\lambda+1)\,i\pi$$

car la valeur de $\Phi(t)$ n'intervient pas dans la détermination de λ.

Pour cela, calculons l'intégrale par un autre procédé qui mettra en évidence la détermination des logarithmes.

Nous savons qu'on a (T. et M. XXXIII 7) :

$$\zeta(t-Z) = \frac{\eta_1}{\omega_1}(t-Z) + \frac{1}{2\omega_1}\frac{\vartheta_1'\left(\frac{t-Z}{2\omega_1}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{t-Z}{2\omega_1}\right)}$$

d'où

$$\int_0^{\omega_1} \zeta(t-Z)\,dt = \frac{\eta_1\omega_1}{2} - \eta_1 Z + \left[\log\vartheta_1\left(\frac{t-Z}{2\omega_1}\right)\right]_{t=0}^{t=\omega_1}$$

le chemin d'intégration pour le point $v = \frac{t-Z}{2\omega_1}$ est celui qui est tracé en trait plein sur la *figure 5*.

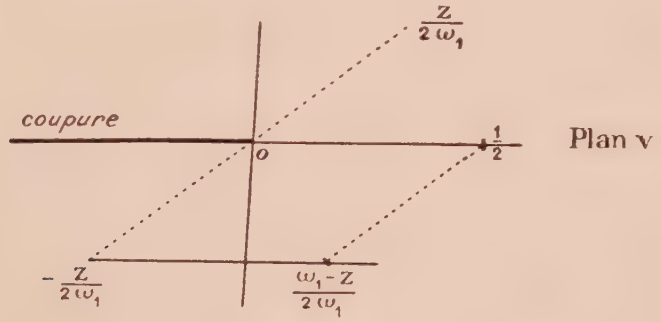


FIG. 5.

Si nous adoptons pour le logarithme de $\vartheta_1(v)$ la détermination principale, qui possède une partie imaginaire comprise entre $-\pi$ et $+\pi$ (T. et M. t. III, p. 160), la figure montre que

$$\left[\log\vartheta_1\left(\frac{t-Z}{2\omega_1}\right)\right]_{t=0}^{t=\omega_1} = \log\vartheta_1\left(\frac{\omega_1-Z}{2\omega_1}\right) - \log\vartheta_1\left(\frac{-Z}{2\omega_1}\right)$$

sans ajouter de multiple de $i\pi$.

Mais

$$\log \vartheta_1\left(\frac{\omega_1 - Z}{2\omega_1}\right) = \log \vartheta_1\left(\frac{1}{2} - \frac{Z}{2\omega_1}\right) = \log \vartheta_2\left(\frac{Z}{2\omega_1}\right) \quad \text{(T. et M. XXXIV, 4.)}$$

$$\log \vartheta_1\left(\frac{-Z}{2\omega_1}\right) = \log \vartheta_1\left(\frac{Z}{2\omega_1}\right) - i\pi$$

à cause de la détermination choisie pour $\log \vartheta_1(v)$. (Voir *fig.* 5.)

Donc,

$$\int_0^{\omega_1} \zeta(t - Z)\, dt = \frac{\eta_1 \omega_1}{2} - \eta_1 Z + \log \vartheta_2\left(\frac{Z}{2\omega_1}\right) - \log \vartheta_1\left(\frac{Z}{2\omega_1}\right) + i\pi$$

les deux logarithmes ayant leurs arguments compris entre o et π.

Pour faire apparaître les fonctions $\log \sigma\omega_1$, $\log \sigma_1 Z$ et $\log \sigma Z$, utilisons les formules XXXIII de l'ouvrage de Tannery et Molk. Elles donnent

$$\log \sigma\omega_1 = \log 2\omega_1 + \log \vartheta_1\left(\frac{1}{2}\right) - \log \vartheta_1'(0) + \frac{\eta_1 \omega_1}{2}$$

$$\log \sigma_1 Z = \log \vartheta_2\left(\frac{Z}{2\omega_1}\right) - \log \vartheta_2(0) + \eta_1 \frac{Z^2}{2\omega_1}$$

$$\log \sigma Z = \log \vartheta_1\left(\frac{Z}{2\omega_1}\right) - \log \vartheta_1'(0) - \eta_1 \frac{Z}{2\omega_1} + \log 2\omega_1$$

d'où

$$\log \sigma\omega_1 + \log \sigma_1 Z - \log \sigma Z = \frac{\eta_1 \omega_1}{2} + \log \vartheta_2\left(\frac{Z}{2\omega_1}\right) - \log \vartheta_1\left(\frac{Z}{2\omega_1}\right)$$

car

$$\vartheta_1\left(\frac{1}{2}\right) = \vartheta_2(0);$$

donc

$$\int_0^{\omega_1} \zeta(t - Z)\, dt = \log \sigma\omega_1 + \log \sigma_1 Z - \log \sigma Z - \eta_1 Z + i\pi$$

et en comparant à la valeur obtenue précédemment (10) pour cette intégrale, nous trouvons

$$\lambda = 0$$

ce qui permet d'écrire

$$P + iQ = -\frac{d}{dZ}(H + iH') = \frac{i}{\pi}\int_0^{\omega_1} \Phi(t)\,[p(Z - t) + p(Z + t)]\, dt + \frac{2a\eta_3}{\pi}$$

$$= -\frac{2\eta_1 i}{\pi}\Phi(\omega_1) + \frac{i}{\pi}\Phi'(\omega_1)\log[\sigma(\omega_1 - Z)\,\sigma(\omega_1 + Z)] - \frac{2i}{\pi}\Phi'(+0)\log \sigma Z$$

$$- \frac{i}{\pi}\int_0^{\omega_1} \Phi''(t)\log[\sigma(t - Z)\,\sigma(t + Z)]\, dt + \frac{2a'\eta_3}{\pi} - \Phi'(+0).$$

En un point de l'orifice μ_1, très près du bord C, on peut poser

$$Z = \rho(\cos\varepsilon + i\sin\varepsilon)$$

ρ et ε étant des infiniments petits du premier ordre; si donc on pose

$$Z = X + iY,$$

X est un infiniment petit du premier ordre, tandis que Y est du second ordre.

On peut donc écrire

$$\begin{aligned}\log\sigma Z &= \log Z\\ &= \log X + \log\left(1 + i\frac{Y}{X}\right)\\ &= \log X + i\frac{Y}{X}\end{aligned}$$

et, dans la valeur de Q, remplacer $\log\sigma Z$ par $\log X$. On aura finalement

$$\begin{aligned}P_0 &= -\Phi'(+0)\\ Q_0 &= -\frac{2i}{\pi}\Phi'(+0)\log X + iR\end{aligned}$$

en désignant par R une fonction réelle, non nulle, finie, et par P_0 et Q_0 les fonctions P et Q prises au voisinage d'un bord et très près de l'orifice.

Il résulte des calculs précédents que, en un point voisin du bord C de l'orifice, la fonction

$$u' - iv' = (P + iQ)\frac{dZ}{dz},$$

qui est liée d'une façon évidente à l'accélération initiale de la particule liquide située en ce point, a la même limite que

$$(11)\qquad A_1\left[-\Phi'(+0)\left(1 + \frac{2i}{\pi}\log X\right) + iR\right] Z^{-1+\frac{1}{\pi}(\theta_0-\theta_1)}$$

lorsque Z tend vers zéro.

La quantité $\Phi'(+0)$, qui joue ici un rôle important, est indépendante de la position du point Z et ne dépend que de la forme de la paroi amovible CD au voisinage du bord C. Elle a pour expression

$$\Phi'(+0) = \lim_{X=0} g\frac{dy}{ds}\frac{ds}{dX},$$

ds étant l'élément d'arc de la courbe CD. Nous supposons bien entendu que cette

courbe admet au point C une tangente bien déterminée. Dans ce cas, $\Phi'(+0)$ existe, est finie et a pour valeur

$$g \sin \theta_0 \lim_{X=0} \left(\frac{ds}{dX} \right).$$

Si

$$\theta_0 = 0,$$

on a aussi

$$\Phi'(+0) = 0.$$

Ceci posé, nous pouvons examiner les cas qui se présentent suivant les valeurs de l'angle que la paroi du vase fait au point C, angle qui a pour mesure $\theta_0 - \theta_1$.

a) Si

$$\theta_0 - \theta_1 > \frac{\pi}{2},$$

on a

$$-1 + \frac{2}{\pi}(\theta_0 - \theta_1) > 0$$

et le facteur

$$Z^{-1+\frac{2}{\pi}(\theta_0-\theta_1)}$$

tend vers zéro avec Z.

Il en est de même de u' et de v', et on peut dire :

L'accélération initiale est NULLE *en un point très voisin du bord de l'orifice, si l'angle de la paroi amovible et de la paroi fixe en ce point est supérieur à un angle droit.*

b) Si

$$\theta_0 - \theta_1 < \frac{\pi}{2},$$

on a

$$-1 + \frac{2}{\pi}(\theta_0 - \theta_1) < 0$$

et le facteur

$$Z^{-1+\frac{2}{\pi}(\theta_0-\theta_1)}$$

augmente indéfiniment quand Z tend vers zéro.

L'accélération initiale est INFINIE *en un point très voisin du bord de l'orifice, si l'angle de la paroi amovible et de la paroi fixe en ce point est inférieur à un angle droit.*

Dans le cas particulier où

$$\Phi'(+0) = 0,$$

c'est-à-dire quand la tangente à la paroi μ_1 au point C est horizontale, u' est nul. Mais comme v' est tout de même infini, l'accélération est encore infinie; elle est, de plus, verticale.

c) Si

$$\theta_0 - \theta_1 = \frac{\pi}{2},$$

on a

$$-1 + \frac{2}{\pi}(\theta_0 - \theta_1) = 0,$$

$$u' - iv' = -A_1\Phi'(+0) - iA_1\left[\frac{2}{\pi}\log X\,\Phi'(+0) - R\right].$$

Si, quand X tend vers zéro par valeurs positives, le produit

$$\Phi'(X)\log X$$

tend vers une limite finie, ce qui a lieu en particulier si $\Phi'(X)$ est un infiniment petit du premier ordre pour X positif, l'accélération au point C est finie et verticale.

Si $\Phi'(X)$ ne tend pas vers zéro avec X, l'accélération est infinie et oblique.

Donc, *si l'angle de la paroi amovible et de la paroi fixe est droit, l'accélération en un point très voisin du bord est finie et verticale si la tangente à la paroi amovible en ce point est horizontale. Elle est infinie et oblique dans le cas contraire.*

Comme tout le liquide part du repos, seules les particules qui ont une accélération infinie acquièrent en un instant très court une vitesse finie. Le débit initial de l'orifice est donc constitué par de telles particules, et l'affirmation que ce débit initial provient entièrement des bords ne sera justifiée que dans certains cas, comme nous venons de le voir.

Dans les cas que nous venons de délimiter au cours de la discussion précédente, cas pour lesquels le débit initial provient des bords de l'orifice, on peut supposer que cet orifice est brusquement refermé après un intervalle de temps très court. Les particules liquides qui possédaient une accélération infinie ont seules quitté le vase et forment une nappe linéaire, rectiligne, simple ou double suivant que l'un des deux bords seulement ou tous les deux satisfont aux conditions énoncées; cette nappe tombe verticalement si l'accélération initiale est verticale, sinon elle décrit un cylindre à génératrices horizontales et à section parabolique.

Les résultats précédents paraissent s'étendre, tout au moins dans une première approximation, au cas où le récipient a une forme quelconque, qui ne permet pas

d'utiliser la théorie des mouvements parallèles à un plan fixe et de profiter des simplifications qu'elle autorise. Tout au moins dans le cas des orifices limités par des courbes ne présentant pas de points anguleux, par des cercles, par exemple, il semble qu'on puisse appliquer à chaque point M du bord de l'orifice les résultats intrinsèques de la discussion précédente, avec la différence que les sections de la paroi fixe et de la paroi amovible par le plan normal à la tangente en M joueront le rôle des lignes λ_1 et μ_1.

Il s'ajoute un phénomène secondaire, produit probablement par le frottement des particules liquides sur les bords des parois fixes; ces particules prennent un mouvement de rotation très rapide et produisent un anneau de tourbillon. Ce phénomène se réalise pratiquement dans la compression *brusque* des parois d'un récipient en tôle mince, rempli de vin, percé d'un orifice circulaire, que l'on a préalablement plongé dans un bassin rempli d'eau. Cette compression brusque produit sur les particules liquides qui, près de l'orifice, sont au contact de l'eau, le même effet qu'une brusque dépression par suppression d'une paroi amovible, et il y a un anneau de vin qui progresse dans l'eau suivant les lois bien connues des anneaux de tourbillon (Cf. Vergne, *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1920, p. 220). On se trouve en effet dans le cas où

$$\theta_0 - \theta_1 = 0 < \frac{\pi}{2}$$

et l'accélération initiale est infinie sur les bords.

§ 3. — Étude d'un cas particulier.

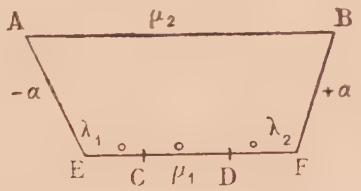
Nous allons appliquer ces calculs et les pousser jusqu'au bout dans le cas d'un vase symétrique, de fond horizontal, limité de part et d'autre par des parois planes inclinées d'un angle α sur le fond et dont la dimension parallèle au plan de symétrie est assez grande pour que le problème puisse être traité à deux dimensions seulement dans une section droite, si elle n'est pas trop voisine d'une extrémité du vase. L'orifice découpé dans le fond du vase présente les mêmes symétries que celui-ci.

Soit h la hauteur du liquide dans le vase; l'équation (4) s'écrit :

$$\Pi + i\Pi' = \frac{-igh}{\pi} \int_0^{\omega_4} [\zeta(Z - t) + \zeta(Z + t)]\, dt - \frac{2a r_{13}}{\pi} Z$$

avec la condition (5)

$$-gh\omega_3 = \frac{a\omega_3}{i}$$

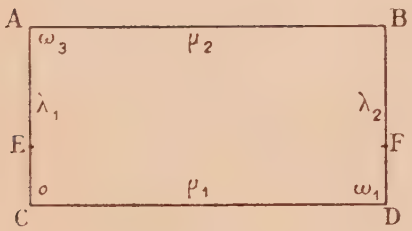


Plan z

FIG. 6.

ou

$$\frac{-\omega_3}{i\omega_1} = \frac{gh}{a},$$



Plan Z

FIG. 7.

d'où

$$H + iH' = \frac{a\omega_3}{\pi\omega_1}\log\frac{\sigma(Z+\omega_1)}{\sigma(Z-\omega_1)} - \frac{2a\eta_{13}}{\pi}Z.$$

Pour la détermination du logarithme qui figure au second membre de cette équation, on opère comme plus haut (page 19) et on trouve

$$H + iH' = \frac{a\omega_3}{\pi\omega_1}(-i\pi + 2\eta_{14}Z) - \frac{2a\eta_{13}}{\pi}Z,$$

$$= \frac{a\omega_3}{i\omega_1} + \frac{2a}{\pi\omega_1}Z(\eta_{13}\omega_2 - \eta_{12}\omega_1).$$

D'où

(12) $$H + iH' = -gh + i\frac{aZ}{\omega_1}.$$

En particulier

$$\text{sur } \mu_1 \qquad Y = 0, \qquad H = -gh, \qquad H' = \frac{a\Lambda}{\omega_1},$$

$$\text{sur } \lambda_1 \qquad X = 0, \qquad H = -gh - \frac{aY}{\omega_1}, \qquad H' = 0,$$

$$\text{sur } \lambda_2 \qquad X = \omega_1, \qquad H = -gh - \frac{aY}{\omega_1}, \qquad H' = a.$$

On a d'autre part, en vertu de l'équation (9),

$$\frac{dz}{dZ} = \frac{1}{N}\frac{\sigma Z\,\sigma_1 Z}{\sigma_2 Z\,\sigma_3 Z}\,e^{\frac{1}{\pi}(I_1 - I_2)}$$

en posant

$$I_1 = i\int_{t_0}^{\frac{\omega_3}{i}} -\alpha\,[\zeta(Z - it) - \zeta(Z + it)]\,dt,$$

$$I_2 = i\int_{t_0}^{\frac{\omega_3}{i}} \alpha\,[\zeta_1(Z - it) - \zeta_1(Z + it)]\,dt$$

et en appelant t_0 l'ordonnée, dans le plan Z du point E de la paroi λ_1 et du point F de la paroi λ_2 qui correspondent aux points anguleux de ces parois dans le plan z.

On a

$$I_1 - I_2 = \alpha i\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} [\zeta(it - Z) + \zeta(it + Z) + \zeta_1(it - Z) + \zeta_1(it + Z)]\,dt$$

$$= \alpha\,\mathrm{Log}\,\frac{\sigma(Z - \omega_3)\,\sigma(Z + \omega_3)\,\sigma_1(Z - \omega_3)\,\sigma_1(Z + \omega_3)}{\sigma(Z - it_0)\,\sigma(Z + it_0)\,\sigma_1(Z - it_0)\,\sigma_1(Z + it_0)}$$

$$= \alpha\,\mathrm{Log}\,\frac{-(\sigma\omega_3\,\sigma_1\omega_3\,\sigma_2 Z\,\sigma_3 Z)^2}{(\sigma Z\,\sigma_1 Z\,\sigma_2 it_0\,\sigma_3 it_0 - \sigma_2 Z\,\sigma_3 Z\,\sigma_1 it_0\,\sigma it_0)\,(\sigma Z\,\sigma_1 Z\,\sigma_2 it_0\,\sigma_3 it_0 + \sigma_2 Z\,\sigma_3 Z\,\sigma_1 it_0\,\sigma it_0)}$$

(T. et M., XV, 4).

$$= \alpha\,\mathrm{Log}\,\frac{-(\sigma\omega_3\,\sigma_1\omega_3\,\sigma_2 Z\,\sigma_3 Z)^2}{(\sigma Z\,\sigma_1 Z\,\sigma_2 it_0\,\sigma_3 it_0)^2 - (\sigma_2 Z\,\sigma_3 Z\,\sigma it_0\,\sigma_1 it_0)^2}$$

$$= \alpha\,\mathrm{Log}\,\frac{-(\sigma\omega_3\,\sigma_1\omega_3)^2}{(\sigma_2 it_0\,\sigma_3 it_0)^2\left[\left(\frac{\sigma Z\,\sigma_1 Z}{\sigma_2 Z\,\sigma_3 Z}\right)^2 - \left(\frac{\sigma it_0\,\sigma_1 it_0}{\sigma_2 it_0\,\sigma_3 it_0}\right)^2\right]}$$

d'où

$$\frac{dz}{dZ} = \frac{1}{N}\frac{\sigma Z\,\sigma_1 Z}{\sigma_2 Z\,\sigma_3 Z}\,\frac{N^{\frac{\omega_2}{\pi}}}{(\sigma_2 it_0\,\sigma_3 it_0)^2\left[\left(\frac{\sigma Z\,\sigma_1 Z}{\sigma_2 Z\,\sigma_3 Z}\right)^2 - \left(\frac{\sigma it_0\,\sigma_1 it_0}{\sigma_2 it_0\,\sigma_3 it_0}\right)^2\right]}$$

$$\frac{dz}{dZ} = N^{-1+\frac{2\alpha}{\pi}}\,(\sigma_2 it_0\,\sigma_3 it_0)^{-\frac{2\alpha}{\pi}}\,\Theta(\Theta^2 - \Theta_0^2)^{-\frac{\alpha}{\pi}}$$

en posant

$$\mathfrak{C} = \frac{\sigma Z\, \sigma_4 Z}{\sigma_2 Z\, \sigma_3 Z},$$

$$\mathfrak{C}_0 = \frac{\sigma il_0\, \sigma_4 il_0}{\sigma_2 il_0\, \sigma_3 il_0}.$$

Passons aux fonctions ϑ, en posant

$$v = \frac{Z}{2\omega_1},$$

$$\mathfrak{C} = 2\omega_1 \frac{\vartheta_3(0)\,\vartheta_4(0)}{\vartheta_1'(0)\,\vartheta_2(0)} \cdot \frac{\vartheta_4(v)\,\vartheta_2(v)}{\vartheta_1(v)\,\vartheta_4(v)} = CV$$

en écrivant

$$C = 2\omega_1 \frac{\vartheta_3(0)\,\vartheta_4(0)}{\vartheta_1'(0)\,\vartheta_2(0)}, \tag{13}$$

$$V = \frac{\vartheta_4(v)\,\vartheta_2(v)}{\vartheta_1(v)\,\vartheta_4(v)}.$$

Construisons les fonctions elliptiques de période $\frac{\omega_1}{2}$ et ω_3; les formules XLVII, 3 de Tannery et Molk donnent

$$V = \frac{\vartheta_4\left(2v \mid \frac{\omega_1}{2}, \omega_3\right)}{\vartheta_4\left(2v \mid \frac{\omega_1}{2}, \omega_3\right)} \quad (1)$$

ce qui est, en vertu des formules LXXI (T. et M.),

$$\sqrt{k}\, Sn\left(4Kv \mid \frac{\omega_1}{2}, \omega_3\right)$$

k et K étant le module et la demi-période réelle de ces nouvelles fonctions.

D'où

$$\mathfrak{C} = c\sqrt{k}\, Sn\left(\frac{2K}{\omega_1} Z \mid \frac{\omega_1}{2}, \omega_3\right)$$

et, de même, on aurait

$$\mathfrak{C}_0 = c\sqrt{k}\, Sn\left(\frac{2K}{\omega_1} il_0 \mid \frac{\omega_1}{2}, \omega_3\right).$$

(1) Transformation de Landen; il suffirait d'écrire $\vartheta(2v, 2\tau)$, $sn(4Kv, 2\tau)$, etc.; sans spécifier la valeur des périodes; mais ainsi la suite des calculs est plus claire.

Nous pouvons poser

$$\frac{2K}{\omega_1} Z = Z',$$

$$\frac{2K}{\omega_1} il_0 = Z'_0.$$

et, dès lors,

$$\frac{dz}{dZ} = N^{-1+\frac{2\alpha}{\pi}} (\sigma_2 il_0 \sigma_3 il_0)^{-\frac{2\alpha}{\pi}} C^{1-\frac{2\alpha}{\pi}} k^{\frac{\pi-2\alpha}{\pi}} SnZ'(Sn^2Z' - Sn^2Z'_0)^{-\frac{\alpha}{\pi}}$$

ou encore

$$\frac{dz}{dZ'} = BSnZ'(Sn^2Z' - Sn^2Z'_0)^{-\frac{\alpha}{\pi}} \tag{14}$$

en posant

$$B = \frac{\omega_1}{2K} N^{-1+\frac{2\alpha}{\pi}} (\sigma_2 il_0 \sigma_3 il_0)^{-\frac{2\alpha}{\pi}} C^{1-\frac{2\alpha}{\pi}} k^{\frac{\pi-2\alpha}{2\pi}} \tag{15}$$

et en remarquant que SnZ'_0 est imaginaire pure, Z'_0 étant compris entre o et iK'.

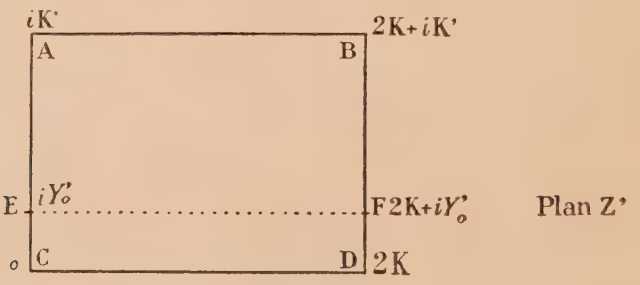


Fig. 8.

Nous avons noté en passant que K et k se rapportaient aux fonctions elliptiques de périodes $\frac{\omega_1}{2}$ et ω_3. Si donc on appelle e_1, e_2, e_3 les racines de l'équation

$$p'(u \mid \omega_1, \omega_3) = 0$$

et E_1, E_2, E_3 les racines de l'équation

$$p'(u \mid \frac{\omega_1}{2}, \omega_3) = 0,$$

on a

$$K = \frac{\omega_1}{2}\sqrt{E_1 - E_3} = \frac{\omega_1}{4}(\sqrt{e_1 - e_2} + \sqrt{e_1 - e_3}) \tag{16}$$

en vertu des formules XXXVI, 4 et XLVII, 4 (T. et M.) et

$$\sqrt{k} = \frac{\vartheta_2\left(0 \mid \frac{\omega_1}{2}, \omega_3\right)}{\vartheta_3\left(0 \mid \frac{\omega_1}{2}, \omega_3\right)} = \sqrt{\frac{\vartheta_3^2(0) - \vartheta_4^2(0)}{\vartheta_3^2(0) + \vartheta_4^2(0)}} = \frac{\sqrt{e_1 - e_3} - \sqrt{e_4 - e_2}}{\sqrt{e_1 - e_3} + \sqrt{e_4 - e_2}}$$

$$= \frac{3e_1 - 2\sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}}{e_2 - e_3} \tag{17}$$

en vertu des formules XXXVII, 1, XLVII, 4 et XXXVI, 4 de l'ouvrage de Tannery et Molk.

Nous avons trouvé

$$\frac{dz}{dZ'} = \mathrm{B}\,Sn\,Z'(Sn^2Z' - Sn^2Z'_0)^{-\frac{1}{2}}.$$

Or, on a

$$Sn\,iY' = e^{\frac{iz}{2}}\,P(Y')$$

avec

$$P(Y') > 0$$

et

$$Sn(iY' + 2K) = e^{-\frac{i\pi}{2}}\,P(Y'),$$

il en résulte que :

a) Si le point Z′ est sur l'un des segments EC, CD, EF, l'expression

$$Sn^2Z' - Sn^2Z'_0$$

est réelle et positive, et l'on a

sur CD	dz réel
sur FC	$dz = -P_1(Y')\,dY'$
sur DF	$dz = P_1(Y')\,dY'$

$P_1(Y')$ étant une fonction réelle et positive de Y′.

b) Si le point Z′ est l'un des segments AE ou FB, l'expression

$$Sn^2Z' - Sn^2Z'_0$$

est réelle et négative, et l'on a

sur AE	$dz = -P_2 e^{-\alpha i}\,dY'$
sur BF	$dz = +P_2 e^{\alpha i}\,dY'$

P_2 étant une fonction réelle et positive de Y′.

Nous avons donc :

$$H + iH' = -gh + i\frac{aZ}{\omega_1} = -gh + i\frac{aZ'}{2K}$$

$$\frac{dz}{dZ'} = BSnZ'(Sn^2Z' - Sn^2Z'_0)^{-\frac{\alpha}{\pi}}$$

et l'équation

$$u' - iv' = -\frac{d(H + iH')}{dZ'}\frac{dZ'}{dz}$$

donne

$$u' - iv' = \frac{a}{2iK}\frac{(Sn^2Z' - Sn^2Z'_0)^{\frac{\alpha}{\pi}}}{BSnZ'}$$

qui fournit la solution du problème.

Dans le plan Z' (*fig. 8*), ce sont les points $Z' = 0$ et $Z' = 2K$ qui correspondent aux bords de l'orifice. Or, en chacun de ces points on a

$$SnZ' = 0,$$

Donc, dans le cas général, u' et v' sont infinis aux points situés près des bords de l'orifice. Ces résultats sont bien en concordance avec ceux que nous avons déjà obtenus au paragraphe précédent, puisque ici l'angle des parois est nul.

Le seul cas exceptionnel est celui où

$$SnZ'_0 = 0.$$

Il correspond uniquement à

$$Z'_0 = 0$$

puisque Z'_0 est compris entre 0 et iK'.

Ce cas correspond donc à

$$l_0 = 0.$$

Les points E et C, F et D coïncident deux à deux et *le fond du vase tout entier est amovible et constitue l'orifice.*

On a alors

$$u' - iv' = \frac{a}{2KBi}Sn^{\frac{2\alpha}{\pi}-1}Z'.$$

Nous voyons que l'accélération est nulle ou infinie suivant que l'angle α est supérieur ou inférieur à un angle droit.

Si

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

on a

$$u' = 0$$

et l'accélération est verticale.

Tout ceci est encore conforme aux résultats de la discussion du paragraphe précédent.

L'extension de ces résultats à des problèmes nécessitant l'emploi des trois dimensions, en particulier au cas des vases ayant la forme d'un tronc de cône, est intuitive. Si, dans un tel vase, on supprime brusquement le fond, le débit initial proviendra ou non du pourtour de l'orifice suivant que celui-ci est constitué par la petite ou par la grande base du tronc de cône.

§ 4. — Étude particulière de la dépression.

Nous avons appelé $H(z)$ la valeur de la dépression instantanée qui se fait sentir au point z du liquide au moment où l'orifice μ_2 est découvert, de telle sorte que la pression en ce point passe brusquement de la valeur $-gy$ à la valeur

$$p = -gy + H$$

abstraction faite de la pression atmosphérique qui ne change pas.

Cette fonction H est négative en tout point du liquide, sa valeur absolue décroît à mesure que le point z s'éloigne de l'orifice μ_1, et elle atteint la valeur zéro quand le point est sur la surface libre μ_2.

Pour le vérifier facilement, supposons d'abord la paroi mobile μ_1 horizontale, de telle sorte que

$$\Phi(t) = -gh.$$

Nous avons vu plus haut que l'équation (4) donne dans ce cas

$$H + iH' = -gh + i\frac{aZ}{\omega_1}$$

d'où

$$H = -gh - \frac{aY}{\omega_1} \quad (Z = X + iY)$$

et que la condition (5) s'écrit

$$-gh\omega_1 = \frac{a\omega_2}{i}$$

ce qui permet d'écrire H sous la forme

$$H = -\frac{gh}{a}(\omega_2 - iY), \tag{18}$$

Sur cette équation, on voit parfaitement comment varie H quand on s'éloigne de l'orifice, c'est-à-dire quand iY varie de o à ω_2.

Le cas où la paroi μ_1 n'est pas horizontale se ramène à celui-ci par l'application à l'intégrale

$$\int_0^{\omega_1} \Phi(t)\,[\zeta(Z-t)+\zeta(Z+t)]\,dt$$

du théorème de la moyenne généralisé.

Soient M et m le maximum et le minimum de la fonction $\Phi(t)$ lorsque t varie de o à ω_1; l'intégrale considérée sera comprise entre les limites

$$M\int_0^{\omega_1}[\zeta(Z-t)+\zeta(Z+t)]\,dt$$

et

$$m\int_0^{\omega_1}[\zeta(Z-t)+\zeta(Z+t)]\,dt$$

et comme $\Phi(t)$ est fini et continu dans l'intervalle indiqué, il existe une valeur t_0 de t telle que

$$\int_0^{\omega_1}\Phi(t)\,[\zeta(Z-t)+\zeta(Z+t)]\,dt = \Phi(t_0)\int_0^{\omega_1}[\zeta(Z-t)+\zeta(Z+t)]\,dt.$$

On a alors

$$H + iH' = \frac{i}{a}\Phi(t_0)(-i\pi + 2\pi_1 Z) - 2a\frac{\pi_2}{\pi}Z$$

d'où

$$H = \Phi(t_0) - \frac{2Y}{a}[\Phi(t_0)\pi_1 + i\pi_2 a], \tag{19}$$

Comme π_1 et $i\pi_2$ sont positifs, $\Phi(t_0)$ et a négatifs, on voit que H est négatif et décroît en valeur absolue quand Y augmente de o à $\frac{\omega_2}{i}$.

Si nous appliquons également le théorème de la moyenne à l'intégrale

$$\int_0^{\omega_1} \Phi(t)\,dt$$

nous pouvons écrire la condition (5) sous la forme

$$\omega_1 \Phi(t_1) = \frac{a\,\omega_1}{i}$$

en appelant t_1 une valeur du paramètre comprise entre o et ω_1.

Nous en tirons

$$a = \frac{i\,\omega_1}{\omega_3}\,\Phi(t_1)$$

et l'expression (19) s'écrit

$$H = \Phi(t_0) - \frac{2Y}{\omega_3\,\pi}\left[\Phi(t_0)\,\eta_{13}\,\omega_3 - \Phi(t_1)\,\eta_{13}\,\omega_1\right].$$

Si l'orifice μ_1 est disposé de telle sorte que la cote de ses points varie dans de faibles limites, t_0 et t_1 sont sûrement très voisins l'un de l'autre; nous pouvons alors poser

$$\Phi(t_0) - \Phi(t_1) = \varepsilon$$

et écrire

$$H = \Phi(t_0)\,\frac{\omega_3 - iY}{\omega_3} + 2\,\frac{\eta_{13}\,\omega_1}{\pi\,\omega_3}\,\varepsilon Y \tag{20}$$

en utilisant la relation bien connue

$$\eta_{13}\,\omega_3 - \eta_{13}\,\omega_1 = i\,\frac{\pi}{2}$$

En particulier, pour un orifice très petit, on a à peu près, quelle que soit sa forme et son orientation,

$$H = \Phi(t_0)\,\frac{\omega_3 - iY}{\omega_3} \tag{21}$$

équation tout à fait analogue à l'équation (18).

La variation de la largeur de l'orifice ouvert doit avoir aussi une influence sur la valeur de la dépression H en un point donné; mais cette influence est très difficile à mettre en évidence sur les formules générales, les modifications qui en résultent pour les fonctions $\Phi(t)$, $F(t)$, $F_1(t)$, $F_2(t)$ étant impossibles à exprimer dans la plupart des cas.

Nous devons donc nous borner aux cas les plus simples, ceux pour lesquels l'équation (21) représente le phénomène d'une façon assez approchée. Nous pourrons en outre, sans trop diminuer la généralité de la solution, supposer l'élargissement de l'ouverture pratiqué de telle sorte que la valeur de $\Phi(t_0)$ ne soit pas modifiée.

Dès lors, la fonction H varie comme le rapport

$$\frac{iY - \omega_3}{\omega_3} = \frac{iY}{\omega_3} - 1$$

puisque $-\Phi(t_0)$ est positif.

De la façon dont nous avons choisi (Cf. § 1) les périodes ω_1 et ω_3, il résulte d'une façon évidente que le rapport

$$\tau = \frac{\omega_3}{i\omega_1}$$

varie en raison inverse de la largeur de l'orifice; nous pouvons choisir dans tous les cas la même longueur ω_1 pour les côtés horizontaux du rectangle; c'est donc ω_3 qui varie en sens inverse de la largeur de l'orifice. Mais la variation de Y est plus difficile à déterminer.

En effet, nous avons déterminé le domaine D par la condition que son côté inférieur corresponde point par point à la partie amovible μ_1 de la paroi. Si cette partie ne reste pas identique à elle-même, en grandeur et position, la représentation conforme du domaine d sur le nouveau rectangle D' est complètement modifiée. Cependant, si nous admettons que l'orifice CD est simplement élargi en MN (*fig. 9*), de telle sorte que la formule (21) reste applicable et que $\Phi(t_0)$ garde la même valeur, nous pourrons voir ce que devient H pour les points les plus éloignés ou les plus rapprochés de l'orifice.

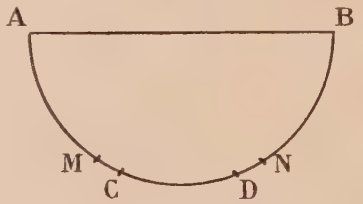


Fig. 9.

Pour les points éloignés de l'orifice, la représentation conforme sur un rectangle AMNB est très voisine de la représentation sur un rectangle ACDB, car la partie de la frontière sur laquelle porte la modification est trop éloignée pour avoir de l'influence sur l'allure de la fonction $Z(z)$ dans cette région. Donc Y est voisin de $\frac{\omega_3}{i}$ et Y' voisin de $\frac{\omega'_3}{i}$. La différence $iY - \omega_3$ n'est pas modifiée sensiblement, et $\frac{iY - \omega_3}{\omega_3}$ croît avec la largeur de l'orifice.

Donc, loin de l'orifice, la dépression instantanée augmente (en valeur absolue) quand la largeur de l'orifice augmente. Bien entendu, à la surface libre elle reste nulle ($Y = \omega_3$), d'où cette attirance vers le bas de l'eau superficielle, qui s'ajoute au frottement le long des parois pour donner naissance aux tourbillons.

Pour les points rapprochés de l'orifice, $\frac{iY}{\omega_3}$ et $\frac{iY'}{\omega'_3}$ sont l'un et l'autre très petits vis-à-vis de 1 et par conséquent $\frac{iY}{\omega'_3} - 1$ n'est pas sensiblement modifié par l'élargissement de l'ouverture. Donc, près de l'orifice, la dépression en un point est indépendante de la largeur de l'orifice (1).

Considérons maintenant la poussée subie par une paroi, résultante des pressions normales exercées par le liquide sur chacun des éléments de cette paroi. Cette poussée éprouvera, au moment de l'ouverture de l'orifice, une variation négative; chaque élément de paroi sera soumis à une percussion dirigée de dehors en dedans.

Soit ds un élément d'arc de la section droite de la paroi (λ_1 ou λ_2); sur cet élément s'exerce une percussion élémentaire $H ds$, dont les projections sur les axes ox et oy ont pour expressions respectivement

$$P_x = H ds \cos(n, x')$$
$$P_y = H ds \cos(n, y')$$

n désignant la normale extérieure et x' et y' les parallèles aux axes ox et oy.

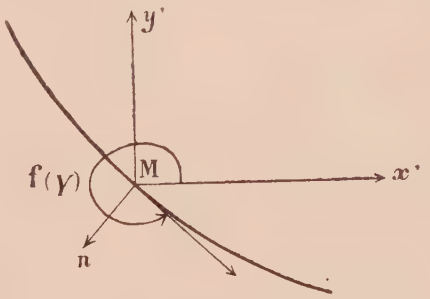


Fig. 10.

Sur la figure 10, il est évident que

$$P_x = H ds \cos\left(f(Y) - \frac{\pi}{2}\right) = H ds \sin f(Y) = H dy$$
$$P_y = H ds \cos\left(\pi - f(Y)\right) = - H ds \cos f(Y) = - H dx$$

(1) Si l'on se déplace le long d'une paroi, λ_1 par exemple, la dépression augmente de C à M (*fig. 9*), puisque $\frac{iY}{\omega_3}$ est croissant et $\frac{iY'}{\omega'_3}$ nul. Entre M et A, il semble naturel de supposer qu'elle est décroissante, du moins pour une paroi à courbure très peu prononcée.

et si nous posons

$$P = P_1 + iP_2$$

il vient :

$$P = H(dy - idx) = -iHdz = -iH\frac{dz}{dZ}dZ.$$

Sur une paroi λ_1 ou λ_2, on a

$$dZ = id\Upsilon$$

d'où

$$P = H\frac{dz}{dZ}d\Upsilon.$$

sur λ_1, on a

$$\frac{dz}{dZ} = e^{-T_1+i\theta_1} = e^{-T_1+i\left(F_1+\frac{\pi}{2}\right)} = ie^{-T_1+iF_1}.$$

sur λ_2, on a

$$\frac{dz}{dZ} = e^{-T_2+i\theta_2} = e^{-T_2+i\left(F_2-\frac{\pi}{2}\right)} = -ie^{-T_2+iF_2}.$$

T_1 et T_2 sont les valeurs que prend la partie imaginaire de la fonction Ω; nous avons donné plus haut leurs expressions en fonction de Υ (page 16).

La percussion exercée sur la paroi sera, pour λ_1 et pour λ_2,

$$(22)\qquad \begin{cases} \mathfrak{L}_1 = -i\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} H_1 e^{-T_1+iF_1}d\Upsilon \\ \mathfrak{L}_2 = -i\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} H_2 e^{-T_2+iF_2}d\Upsilon \end{cases}$$

car, dans la première équation (22), nous devons prendre $d\Upsilon$ avec le signe —, pour parcourir λ_1 *dans le sens direct.*

Si le vase est symétrique par rapport à un plan vertical perpendiculaire au plan du tableau et si l'orifice est également symétrique par rapport à ce plan, on a

$$(23)\qquad \begin{cases} \Phi(\omega_1 - t) = \Phi(t), \\ F(\omega_1 - t) = -F(t), \\ F_2(t) = -F_1(t). \end{cases}$$

Dans ces conditions, on démontre facilement que

$$H_2 = H_1,$$
$$T_2 = T_1.$$

En effet, sur λ_2 on a

$$Z = \omega_1 + iY$$

et

$$H'_2 = a$$

d'où

$$H_2 = \frac{i}{\pi}\int_0^{\omega_1} \Phi(t)\,[\zeta(\omega_1 + iY - t) + \zeta(\omega_1 + iY + t)]\,dt - \frac{2a\eta_{13}}{\pi}(\omega_1 + iY) - ai$$

ou, en posant :

$$\omega_1 - t = \theta$$

$$H_2 = \frac{i}{\pi}\int_0^{\omega_1} \Phi(\omega_1 - \theta)\,[\zeta(iY + \theta) + \zeta(iY - \theta + 2\omega_1)]\,d\theta - \frac{2a\eta_{13}}{\pi}(\omega_1 + iY) - ai$$

$$= \frac{i}{\pi}\int_0^{\omega_1} \Phi(\theta)\,[\zeta(iY + \theta) + \zeta(iY - \theta)]\,d\theta + \frac{i2\eta_{11}}{\pi}\int_0^{\omega_1} \Phi(\theta)\,d\theta - \frac{2a\eta_{13}}{\pi}(\omega_1 + iY) - ai = H_1$$

en vertu de la condition (5) et de la relation

$$\eta_{11}\omega_3 - \eta_{13}\omega_1 = \frac{i\pi}{2}.$$

De même,

$$T_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_1} F(t)\,[\zeta(iY - t) - \zeta(iY + t)]\,dt$$

$$+ \frac{1}{i\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} F_1(t)\,[\zeta_1(iY - it) - \zeta_1(iY + it) + \zeta(iY - it) - \zeta(iY + it)]\,dt + \operatorname{Log}\left|N\frac{\sigma_2 iY\ \sigma_3 iY}{\sigma iY\ \sigma_1 iY}\right|,$$

$$T_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_1} F(t)\,[\zeta(\omega_1 + iY - t) - \zeta(\omega_1 + iY + t)]\,dt$$

$$+ \frac{1}{i\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} F_1(t)\,[\zeta(iY - it) - \zeta(iY + it) + \zeta_1(iY - it) - \zeta_1(iY + it)]\,dt + \operatorname{Log}\left|-N\frac{\sigma_2 iY\ \sigma_3 iY}{\sigma iY\ \sigma_1 iY}\right|.$$

En posant comme plus haut

$$\omega_1 - t = \theta,$$

le premier terme de T_2 s'écrit :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_1} F(\omega_1 - \theta)\,[\zeta(iY + \theta) - \zeta(iY - \theta + 2\omega_1)]\,dt$$

ou encore, en vertu des relations (23),

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_1} F(\theta)\,[\zeta(iY - \theta) - \zeta(iY + \theta)]\,d\theta + \frac{2\eta_{11}}{\pi}\int_0^{\omega_1} F(\theta)\,d\theta.$$

Donc T_2 ne diffère de T_1 que par l'adjonction du terme

$$\frac{2\gamma_1}{\pi}\int_0^{\omega_1} F(\theta)\,d\theta$$

qui est nul en vertu de la relation (23) :

$$F(\omega_1 - \theta) = -F(\theta).$$

Nous avons donc, dans le cas du vase symétrique,

$$\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}_2$$

et nous sommes ramenés au calcul de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} H_1 e^{-T_1 + iF_1}\,dY.$$

Si nous voulons particulariser le problème encore davantage, nous supposerons que les parois λ_1 et λ_2 sont constituées par des surfaces planes; le vase a alors la forme d'une auge (*fig. 11*).

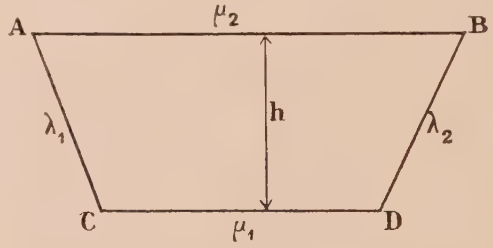


FIG. 11.

Ceci revient à supposer

$$F_1(Y) = -\alpha,$$
$$F_2(Y) = +\alpha,$$
$$F(t) = 0,$$
$$\Phi(t) = -gh,$$

et nous savons que le profil du vase peut être représenté dans un plan Z sur un domaine rectangulaire, de telle sorte que l'on ait

$$\frac{dz}{dZ} = BSn^{\frac{2\alpha}{\pi}} Z,$$

$$H = -gh - \frac{aY}{2K} = -\frac{gh}{K'}(K' - Y),$$

B étant une quantité réelle et positive qui dépend de ω_1 et de ω_3.

Sur λ_1 on a

$$Sn(Y - iS(Y)$$

en posant

$$\frac{Sn(Y|K', iK)}{Cn(Y|K', iK)} = S(Y),$$

S(Y) est une fonction *réelle* qui varie de o à $+\infty$ quand Y varie de o à K'.

On a donc

$$\left(\frac{dz}{dZ}\right)_{x=0} = BS(Y)^{1-\frac{2\alpha}{\pi}} e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)},$$

$$e^{-T_1} = BS(Y)^{1-\frac{2\alpha}{\pi}}.$$

Sur λ_2 on a

$$\left(\frac{dz}{dZ}\right)_{x=2K} = BS(Y)^{1-\frac{2\alpha}{\pi}} e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$$

d'où

$$\mathfrak{L}_1 = \frac{ighB\varepsilon^{-2\alpha}}{K'} \int_0^{K'} (K'-Y)\, S(Y)^{1-\frac{2\alpha}{\pi}}\, dY,$$

$$\mathfrak{L}_2 = \frac{ighB\varepsilon^{2\alpha}}{K'} \int_0^{K'} (K'-Y)\, S(Y)^{1-\frac{2\alpha}{\pi}}\, dY.$$

Les composantes horizontales sont opposées :

$$\mathfrak{L}_x = -\frac{ghB}{K'} \sin\alpha \int_0^{K'} (K'-Y)\, S(Y)^{1-\frac{2\alpha}{\pi}}\, dY;$$

les composantes verticales sont égales :

$$\mathfrak{L}_y = \frac{ghB}{K'} \cos\alpha \int_0^{K'} (K'-Y)\, S(Y)^{1-\frac{2\alpha}{\pi}}\, dY.$$

Nous sommes ramenés au calcul de l'intégrale

$$\int_0^{K'} (K'-Y)\left(\frac{Sn(Y|K', iK)}{Cn(Y|K', iK)}\right)^{1-\frac{2\alpha}{\pi}} dY$$

qui devient, en posant

$$K'-Y=u,$$

$$k'^{\frac{2\alpha}{\pi}-1} \int_0^{K'} u\left[\frac{Cn(u|K', iK)}{Sn(u|K', iK)}\right]^{1-\frac{2\alpha}{\pi}} du;$$

k'_0 est le module complémentaire de la fonction $Sn(u|K', iK)$; c'est donc le module k de la fonction $Sn(u|K, iK')$ que nous avons déjà considéré et qui entre dans l'expression de B.

Si nous appelons I l'intégrale ci-dessus, nous aurons

$$\mathfrak{L}_x = \pm gh \frac{Bk^{\frac{2\alpha}{\pi}-1}}{K'} I \sin\alpha,$$

$$\mathfrak{L}_y = gh \frac{Bk^{\frac{2\alpha}{\pi}-1}}{K'} I \cos\alpha.$$

Le facteur $Bk^{\frac{2\alpha}{\pi}-1}$, que nous appellerons D, se simplifie dans le cas envisagé actuellement et s'exprime au moyen des périodes ω_1 et ω_3. On a, en effet, en faisant $t_0 = 0$ dans l'équation (15),

$$D = \frac{\omega_1}{2KK'} \left(\frac{N}{C}\right)^{\frac{2\alpha}{\pi}-1} k^{\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{\pi}},$$

C est donné par l'équation (13), N par l'équation (8); en leur appliquant les relations XXXVI de Tannery et Molk, on trouve facilement

$$C = Ne^{-\eta_3\omega_3}$$

d'où

$$D = \frac{\omega_1}{2KK'} e^{\eta_3\omega_3\left(1-\frac{2\alpha}{\pi}\right)} k^{-\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{\pi}};$$

K, K', k se rapportent à la fonction $Sn(u|2\tau)$; on a donc

$$K' = 2K\frac{\omega_3}{i\omega_1},$$

$$D = \frac{i\omega_1^2}{4\omega_3} \frac{k^{-\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{\pi}}}{K^2} e^{\eta_3\omega_3\left(1-\frac{2\alpha}{\pi}\right)}.$$

Les relations CX_5 et CX_4 de T. et M. permettent d'exprimer le quotient $\frac{k^{-\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{\pi}}}{K^2}$ en fonction de $Q = q^2 = e^{2i\pi\tau}$. Quant à $\eta_3\omega_3$, la relation X_5 donne son expression en fonction de $\frac{\omega_1}{\omega_3}$.

Dans le cas où $\alpha = \frac{\pi}{2}$, D et I se simplifient. On trouve

$$D = \frac{i\omega_1^2}{\omega_3}\frac{1}{4K^2},$$

$$I = \int_0^{K'} u\,du = \frac{K'^2}{2} = \frac{2K^2\omega_3^2}{-\omega_1^2},$$

et enfin

$$DI = \frac{\omega_3}{2i}.$$

La percussion est horizontale et a pour valeur

$$\mathfrak{P} = +gh\frac{\omega_3}{2i}.$$

Nous voyons qu'elle est indépendante de ω_1, c'est-à-dire de la largeur du vase. C'est le résultat qu'on aurait trouvé en appliquant directement l'équation (18) et en remarquant que les quantités h et ω_3 sont indépendantes de la largeur du vase, ainsi que la variable Y. De telle sorte que

$$\mathfrak{P} = \int_0^{\frac{\omega_3}{i}} H\,dY = gh\frac{\omega_3}{2i}.$$

On peut en outre supposer que les domaines d et D coïncident, ce qui donne

$$\frac{\omega_3}{i} = h,$$

$$\mathfrak{P} = \frac{gh^2}{2}.$$

Cette formule sera homogène si nous rétablissons au deuxième membre la densité du liquide (que l'on a supposée égale à l'unité), car $\mathfrak{P}$ représente une force appliquée sur une bande de paroi de longueur h et de largeur 1.

DEUXIÈME PARTIE

COMPRESSION INSTANTANÉE DANS UN LIQUIDE

§ 1. — Position du problème.

Nous laissons tomber à plat, sur la surface d'un liquide en équilibre dans un vase immobile, une pièce de monnaie circulaire, de dimensions petites par rapport à la distance de ses bords aux parois du vase et à la profondeur de celui-ci; nous aurons ainsi le droit de considérer ce liquide comme indéfini (*fig. 12*).

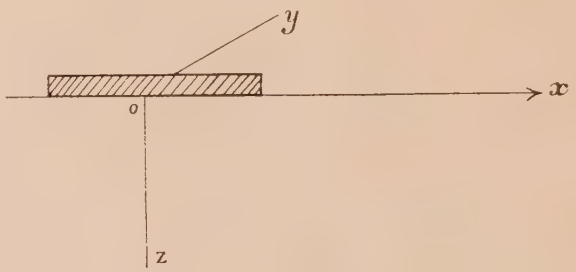


FIG. 12.

La force vive de la pièce se trouve, après le choc, répartie entre la pièce et le liquide; chaque particule de ce dernier reçoit une compression instantanée, de telle sorte que celles de ces particules qui sont à la surface prennent un mouvement ascendant et produisent des « éclaboussements ».

Pour analyser ce phénomène, choisissons un système de coordonnées ayant pour origine le point o de la surface du liquide qui coïncide, au début du choc, avec le centre de la face inférieure de la pièce de monnaie, et pour axes trois axes rectangulaires passant par ce point, l'axe oz étant vertical et dirigé vers le bas.

Le choc produit une percussion qui se transmet instantanément à toute la masse liquide; pendant la durée τ de cette percussion, la pression en un point $M(x, y, z)$ de la masse liquide acquiert une valeur $p(x, y, z)$ qui, en certains points, peut être

très grande et de l'ordre de $\frac{1}{\tau}$; nous poserons

$$P(x, y, z) = \int_0^\tau p(x, y, z)\, dt$$

et cette fonction P recevra le nom de *percussion de pression* au point M.

La vitesse du point M étant nulle pendant la percussion, les équations d'Euler donnent

$$(24)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = -u', \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = -v', \\ -g + \dfrac{\partial p}{\partial z} = -w', \end{cases}$$

où nous avons pris la densité du liquide égale à 1, grâce à un choix d'unités convenable.

Nous appelons W la vitesse (verticale) de translation de la pièce à l'instant du choc, W_0 sa vitesse après le choc (à l'instant τ), $V(u, v, w)$ la vitesse après le choc de la particule liquide située en M.

On a

$$(25)\qquad \begin{cases} \int_0^\tau u'\, dt = u, \\ \int_0^\tau v'\, dt = v, \\ \int_0^\tau w'\, dt = w. \end{cases}$$

L'intégrale $\int_0^\tau g\, dt$ est négligeable,

ce qui permet d'écrire les équations (24) sous la forme

$$(26)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = -u, \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = -v, \\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = -w. \end{cases}$$

Si nous portons ces valeurs de u, v, w dans l'équation de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

cette équation devient

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \Delta P = 0 \tag{27}$$

qui n'est autre que l'équation de Laplace.

Donc la fonction P, potentiel de la fonction V, est une fonction harmonique dans toute la masse liquide. Elle est nulle en tous les points de la surface qui ne sont pas au moment du choc au contact de la pièce, puisque la pression en ces points reste égale à la pression atmosphérique; elle est nulle également aux points intérieurs du liquide qui sont assez éloignés de l'origine pour que V y soit nul; car pour tous ces points la fonction P est constante et égale à la valeur qu'elle prend aux points de la surface, c'est-à-dire à zéro.

De plus, tous les points de la surface du liquide qui sont au contact de la pièce pendant la percussion prennent la même vitesse verticale W_0, égale à celle que la pièce prend après le choc. On a donc pour tous ces points

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -W_0.$$

Nous n'avons pas tenu compte de la viscosité. Il est facile de montrer, avec M. Vergne, que son influence est effectivement négligeable.

Remplaçons les équations d'Euler (24) par les équations de Navier,

$$\text{(24 } bis\text{)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = -u' + \eta_1 \Delta u, \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = -v' + \eta_1 \Delta v, \\ \dfrac{\partial p}{\partial z} = -w' + g + \eta_1 \Delta w, \end{cases}$$

dans lesquelles η_1 désigne le coefficient de viscosité du liquide. Le terme

$$\eta_1 \int_0^{\tau} \Delta u \, dt$$

et les termes analogues étant négligeables, nous voyons que l'on tire toujours les équations (26) et l'équation (27) de l'équation (24 *bis*).

§ 2. — Recherche de la percussion.

La fonction harmonique P est donc déterminée en tous les points de la masse du liquide; elle est nulle en tous les points de la frontière de ce domaine, sauf aux points d'une certaine surface circulaire plane pour lesquels on connaît sa dérivée normale $-W_0$.

Soit C le rayon de la pièce; considérons toutes les quadriques de révolution dont le cercle focal a pour équations

$$x^2 + y^2 - c^2 = 0,$$
$$z = 0.$$

Les méridiennes de ces surfaces ont pour équations, dans les plans passant par oz,

$$\frac{Y^2}{c^2 + \lambda} + \frac{z^2}{\lambda} - 1 = 0 \qquad (Y^2 = x^2 + y^2), \tag{28}$$

ce sont des coniques homofocales se coupant à angle droit.

Pour $\lambda > 0$, ce sont des ellipses réelles;
Pour $0 > \lambda > -c^2$, ce sont des hyperboles;
Pour $\lambda < -c^2$, ce sont des ellipses imaginaires.

Par un point $M(Y, z)$ passent deux coniques; les paramètres correspondant sont les deux racines de l'équation (28), qui s'écrit, si on l'ordonne par rapport à l'inconnue λ :

$$\lambda^2 - (Y^2 + z^2 - c^2)\lambda - c^2 z^2 = 0. \tag{29}$$

Soient λ et μ les racines de cette équation; l'une est positive, l'autre comprise entre 0 et $-c^2$, et on a

$$\lambda + \mu = Y^2 + z^2 - c^2, \tag{30}$$
$$\lambda\mu = -c^2 z^2, \tag{31}$$

d'où

$$z^2 = -\frac{\lambda\mu}{c^2}, \tag{32}$$

$$Y^2 = \frac{\lambda\mu}{c^2} - \lambda - \mu + c^2 = \frac{(\lambda + c^2)(\mu + c^2)}{c^2}. \tag{33}$$

Le point M pourra donc être défini par les valeurs des paramètres des deux quadriques de révolution qui passent en ce point et par la valeur ν d'un paramètre d'orientation, tel que

$$(34)\qquad \begin{cases} x = \Upsilon \cos \nu, \\ y = \Upsilon \sin \nu. \end{cases}$$

Si dans $P(x, y, z)$ nous remplaçons x, y, z par leurs valeurs en fonction des paramètres λ, μ et ν, nous obtenons une nouvelle fonction $Q(\lambda, \mu, \nu)$ qui, par raison de symétrie, ne contiendra pas le paramètre ν; car le phénomène est le même dans tout plan passant par oz, quelle que soit son orientation.

Cette fonction $Q(\lambda, \mu, \nu)$ (1) doit satisfaire à l'équation de Laplace (27)

$$(35)\qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} = 0$$

et aux diverses conditions aux limites que nous avons énoncées au sujet de la fonction P.

En employant les notations usuelles

$$\Delta_1 \lambda = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)^2,$$
$$\Delta_2 \lambda = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2},$$

et en remarquant que

$$\sum \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$$

(car les surfaces sont orthogonales), l'équation (35) s'écrit

$$(36)\qquad \Delta_1 \lambda \frac{\partial^2 Q}{\partial \lambda^2} + \Delta_1 \mu \frac{\partial^2 Q}{\partial \mu^2} + \Delta_2 \lambda \frac{\partial Q}{\partial \lambda} + \Delta_2 \mu \frac{\partial Q}{\partial \mu} = 0.$$

Les équations (30) et (31) donnent :

$$(37)\qquad \frac{\frac{\partial \lambda}{\partial x}}{\lambda x} = \frac{\frac{\partial \lambda}{\partial y}}{\lambda y} = \frac{\frac{\partial \lambda}{\partial z}}{(c^2 + \lambda) z} = \frac{2}{\lambda - \mu} = \frac{\frac{\partial \mu}{\partial x}}{-\mu x} = \frac{\frac{\partial \mu}{\partial y}}{-\mu y} = \frac{\frac{\partial \mu}{\partial z}}{-(c^2 + \mu) z}.$$

(1) Considérée comme fonction de x, y, z par l'intermédiaire de λ, μ et ν.

$$
(38)\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial x^2} = \dfrac{2\lambda}{\lambda-\mu} - \dfrac{8\lambda\mu}{(\lambda-\mu)^3}\,x^2, \\
\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial y^2} = \dfrac{2\lambda}{\lambda-\mu} - \dfrac{8\lambda\mu}{(\lambda-\mu)^3}\,y^2, \\
\dfrac{\partial^2\lambda}{\partial z^2} = \dfrac{2(c^2+\lambda)}{\lambda-\mu} - \dfrac{8(c^2+\lambda)(c^2+\mu)}{(\lambda-\mu)^3}\,z^2, \\
\dfrac{\partial^2\mu}{\partial x^2} = \dfrac{2\mu}{\mu-\lambda} - \dfrac{8\mu\lambda}{(\mu-\lambda)^3}\,x^2, \\
\dfrac{\partial^2\mu}{\partial y^2} = \dfrac{2\mu}{\mu-\lambda} - \dfrac{8\mu\lambda}{(\mu-\lambda)^3}\,y^2, \\
\dfrac{\partial^2\mu}{\partial z^2} = \dfrac{2(c^2+\mu)}{\mu-\lambda} - \dfrac{8(c^2+\lambda)(c^2+\mu)}{(\mu-\lambda)^3}\,z^2.
\end{cases}
$$

$$
(39)\quad
\begin{cases}
\Delta_1\lambda = \dfrac{4\lambda(c^2+\lambda)}{\lambda-\mu}, \\
\Delta_1\mu = \dfrac{4\mu(c^2+\mu)}{\mu-\lambda}, \\
\Delta_2\lambda = \dfrac{2(c^2+3\lambda)}{\lambda-\mu}, \\
\Delta_2\mu = \dfrac{2(c^2+3\mu)}{\mu-\lambda}.
\end{cases}
$$

L'équation (36) devient, quand on remplace $\Delta_1\lambda$, $\Delta_2\lambda$, $\Delta_1\mu$, $\Delta_2\mu$ par les expressions ci-dessus :

$$
(40)\qquad 2\lambda(c^2+\lambda)\frac{\partial^2 Q}{\partial\lambda^2} - 2\mu(c^2+\mu)\frac{\partial^2 Q}{\partial\mu^2} + (c^2+3\lambda)\frac{\partial Q}{\partial\lambda} - (c^2+3\mu)\frac{\partial Q}{\partial\mu} = 0.
$$

§ 3. — Intégration de l'équation de Laplace.

Cette équation se décompose dans le cas où la solution cherchée est un produit de deux fonctions dépendant chacune d'une seule variable, c'est-à-dire si nous posons

$$
Q(\lambda, \mu) = f(\lambda)\,.\,\varphi(\mu)
$$

et il vient

$$
(41)\qquad \frac{2\lambda(c^2+\lambda)f''' + (c^2+3\lambda)f'}{f} = \frac{2\mu(c^2+\mu)\varphi'' + (c^2+3\mu)\varphi'}{\varphi} = E.
$$

E est évidemment indépendant de λ et de μ, donc constant. A chaque valeur de E correspondent les équations

$$\begin{cases} 2\lambda(c^2+\lambda)f'' + (c^2+3\lambda)f' - Ef = 0, \\ 2\mu(c^2+\mu)\varphi'' + (c^2+3\mu)\varphi' - E\varphi = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Les conditions aux limites vont nous renseigner sur la forme des fonctions $f(\lambda)$ et $\varphi(\mu)$ qui sont susceptibles de satisfaire à ces conditions tout en vérifiant les conditions (42) :

a) A la surface du liquide, en dehors du cercle de centre o et de rayon c, $\mu = 0$; on doit avoir $P = 0$ quelque soit λ; donc $\varphi(0) = 0$.

b) Aux points du liquide suffisamment éloignés de l'origine, $\lambda = +\infty$; on doit avoir $P = 0$ quel que soit μ; donc

$$f(+\infty) = 0.$$

c) Aux points du cercle de centre o et de rayon C, $\lambda = 0$; on doit avoir P fini, non nul, et $\frac{\partial P}{\partial z} = -W_0$.

Or,

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial z} = [f'.\varphi.(c^2+\lambda) - \varphi'.f.(c^2+\mu)]\frac{2\sqrt{-\lambda\mu}}{c(\lambda-\mu)}.$$

Puisque $f(0)$ est fini, le terme

$$\varphi'.f.(c^2+\mu)$$

s'annule pour $\lambda = 0$.

Donc le terme

$$\frac{1}{c}.f'.\varphi.(c^2+\lambda)\frac{\sqrt{-\lambda\mu}}{\lambda-\mu}$$

doit être, si l'on fait $\lambda = 0$, fini, non nul, indépendant de μ. Ceci exige que

$$\varphi = k\sqrt{-\mu}.$$

La deuxième des équations (42) est vérifiée par une fonction de cette forme si on donne à E la valeur 1; la première de ces équations devient alors

$$2\lambda(c^2+\lambda)f'' + (c^2+3\lambda)f' - f = 0.$$

Sachant qu'elle admet la solution particulière

$$f = \sqrt{c^2+\lambda},$$

nous trouverons facilement son intégrale générale

$$f(\lambda) = A\left[1 + \frac{\sqrt{\lambda}}{c}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\lambda}}{c}\right] + B\sqrt{\lambda}$$

d'où

$$Q = k\sqrt{-\mu}\left[1 + \frac{\sqrt{\lambda}}{c}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\lambda}}{c} - \frac{K'}{2}\sqrt{\lambda}\right],$$

en appelant K et K' deux nouvelles constantes arbitraires.

Les conditions aux limites permettent de les déterminer si on suppose connue la vitesse finale W_0 de la pièce de monnaie. En effet :

a) $Q(\lambda, 0) = 0$ est vérifié ;

b) $Q(+\infty, 0) = 0$ est vérifié si $K' = -\frac{\pi}{2}$,

car $\frac{\sqrt{\lambda}}{c}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\lambda}}{c} - \frac{\pi}{2}\right)$ a pour limite -1 quand λ augmente indéfiniment ;

c) On a

$$\frac{\partial P}{\partial z} = k\sqrt{-\mu}\left[\frac{1}{2c\sqrt{\lambda}} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\lambda}}{c} + \frac{1}{2c^2 + 2\lambda}\frac{\pi}{4c\sqrt{\lambda}}\right]\frac{2\sqrt{-\lambda\mu}}{c(\lambda - \mu)}(c^2 + \mu)$$

$$+ \frac{K}{2\sqrt{-\mu}}\left[1 + \frac{\sqrt{\lambda}}{c}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\lambda}}{c} - \frac{\pi}{2c}\sqrt{\lambda}\right]\frac{2\sqrt{-\lambda\mu}}{c(\lambda - \mu)}(c^2 + \mu).$$

Pour $\lambda = 0$,

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{K\pi}{2}$$

d'où

$$K = \frac{2W_0}{\pi}.$$

(43) $$Q = \frac{2W_0}{\pi}\sqrt{-\mu}\left[1 + \frac{\sqrt{\lambda}}{c}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\lambda}}{c} - \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{\lambda}}{c}\right].$$

Remarque. — Nous pouvons remarquer ici que les équations

(28) $$\frac{Y^2}{c^2 + \lambda} + \frac{z^2}{\lambda} - 1 = 0, \qquad \lambda > 0,$$

$$\frac{Y^2}{c^2 + \mu} + \frac{z^2}{\mu} - 1 = 0, \qquad \mu < 0,$$

auraient pu être écrites sous la forme

$$\frac{Y^2}{Ch^2\lambda_1} + \frac{z^2}{Sh^2\lambda_1} - c^2 = 0,$$
$$\frac{Y^2}{\cos^2\mu_1} - \frac{z^2}{\sin^2\mu_1} - c^2 = 0,$$

en choisissant des paramètres λ_1 et μ_1 liés à λ et à μ par les relations

$$\lambda = c^2 Sh^2\lambda_1,$$
$$\mu = -c^2 \sin^2\mu_1.$$

On aurait eu

$$x = cCh\lambda_1 \cos\mu_1 \cos\nu,$$
$$y = cCh\lambda_1 \cos\mu_1 \sin\nu,$$
$$z = cSh\lambda_1 \sin\mu_1$$

et un calcul tout à fait analogue à celui que nous avons fait nous aurait fourni la fonction

$$(43\ bis) \qquad Q_1 = \frac{2W_0}{\pi} \sin\mu_1 \left| 1 + Sh\lambda_1 \operatorname{arctg}(Sh\lambda_1) - \frac{\pi}{2} Sh\lambda_1 \right|$$

qui est identique à la fonction Q (équation (43)).

Le seul avantage de cette méthode est d'exprimer commodément les coordonnées d'un point en fonction des paramètres.

§ 4. — Calcul de W_0.

Nous avons vu au paragraphe précédent que le problème serait entièrement résolu si nous connaissions W_0, puisque l'équation (43) donne, en chaque point de la masse du liquide, la valeur de la percussion de pression subie par la particule qui y est située; et nous savons en déduire, grâce aux équations (26), la vitesse de cette particule au bout du temps τ.

La théorie des percussions va nous permettre de calculer W_0 en fonction de la masse M de la pièce de monnaie et de sa vitesse W au moment du choc.

La variation de la quantité de mouvement a pour projection sur oz

$$+ M(W_0 - W).$$

Soit $Q_0(\mu) = Q(o, \mu)$ la valeur commune de la percussion subie par les points du cercle de gorge, de rayon Υ, de l'hyperboloïde correspondant à la valeur μ du paramètre. La percussion subie par un anneau circulaire de rayons Υ et $\Upsilon + d\Upsilon$ aura pour valeur

$$2\pi \Upsilon Q_0(\mu)\, d\Upsilon$$

et comme on a (formule (33))

$$\Upsilon^2 = \mu + c^2,$$

la percussion totale *sur la face inférieure de la pièce de monnaie* aura pour valeur

$$+\pi \int_0^{-c^2} Q_0(\mu)\, d\mu.$$

Mais on a

$$Q_0(\mu) = \frac{2W_0}{\pi}\sqrt{-\mu},$$

On trouve facilement, pour la résultante des percussions,

$$\Pi = -\frac{4}{3} c^3 W_0; \tag{44}$$

Nous devons écrire que cette résultante est égale à la variation de la quantité de mouvement, ce qui donne

$$+M(W_0 - W) = -\frac{4}{3} c^3 W_0. \tag{45}$$

Nous rendrons cette formule homogène en rétablissant au second membre la densité du liquide, que nous appellerons ρ. Nous pouvons remplacer M par sa valeur $\pi c^2 e d$, en désignant par e l'épaisseur et par d la densité de la pièce. Et nous aurons

$$W_0 = \frac{W}{1 + \frac{4}{3\pi}\frac{c}{e}\frac{\rho}{d}}. \tag{46}$$

Donc, la vitesse après le choc est proportionnelle à la vitesse avant le choc et lui est toujours inférieure; elle croît avec la densité de la pièce et avec son épaisseur, mais décroît quand le diamètre augmente. Comme la vitesse de la pièce avant le choc, elle est proportionnelle à la racine carrée de la hauteur de chute.

§ 5. — Vitesses après le choc.

La vitesse W_0 étant ainsi bien déterminée, nous pouvons revenir aux formules (26) qui donnent l'état des vitesses dans le liquide immédiatement après le choc

$$(47)\qquad \begin{cases} u = -\dfrac{\partial P}{\partial x} = \dfrac{2W_0 c^2}{\pi}\dfrac{\sqrt{-\mu}}{(\lambda-\mu)(c^2+\lambda)}x, \\ v = -\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{2W_0 c^2}{\pi}\dfrac{\sqrt{-\mu}}{(\lambda-\mu)(c^2+\lambda)}y, \\ w = -\dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{2W_0}{\pi}\left[\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{\lambda}}{c} - \dfrac{c\sqrt{\lambda}}{\lambda-\mu}\right], \end{cases}$$

avec

$$x = Y\cos\nu,$$
$$y = Y\sin\nu,$$
$$Y^2 = \frac{(\lambda+c^2)(\mu+c^2)}{c^2}.$$

Ces formules permettent de déterminer exactement, en tout point du liquide, la vitesse de la particule liquide qui y est située. Les particules qui sont au contact de la pièce ont une vitesse verticale W_0 et celles qui sont situées sur la surface libre ($\mu = 0$) ont une vitesse verticale ascendante qui croît comme $\dfrac{2W_0 c}{\sqrt{\lambda}}$, c'est-à-dire qui est d'autant plus grande que λ est plus petit, ou que la particule est plus rapprochée de la pièce.

Cette vitesse très grande des particules liquides situées au bord de la pièce est la cause du phénomène des éclaboussements. Les gouttelettes sont projetées verticalement avec une vitesse qui est *théoriquement* infinie, mais qui, *pratiquement*, est finie et d'autant plus grande que le produit

$$W_0 c = \frac{W}{\frac{1}{c} + \frac{4}{3\pi}\frac{\rho}{d.e}}$$

est plus grand.

Ce produit augmente avec le rayon c de la pièce de monnaie et aussi, bien entendu, avec la vitesse de chute W.

Les formules (47) permettent, en outre, d'étudier comment varie la vitesse à l'intérieur du liquide à l'instant τ; cette étude est particulièrement facile pour les points situés sur l'axe oz, pour lesquels on a

$$x = y = 0,$$
$$u = v = 0,$$
$$w = \frac{2W_0}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{z}{c} - \frac{cz}{c^2 + z^2}\right),$$

comme

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{4c^3}{\pi} W_0 \frac{1}{(c^2 + z^2)^2},$$

on voit que w décroît rapidement quand z augmente.

Pour $z = c$, on trouve

$$w = 0{,}18\, W_0;$$

pour $z = 2c$,

$$w = 0{,}03\, W_0.$$

§ 6. — Lignes de courant.

Les lignes de courant sont représentées par les équations

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}.$$

En chacun de leurs points elles sont tangentes à la vitesse de la particule liquide située en ce point. Par symétrie, elles sont situées dans des plans passant par l'axe vertical oz et nous pouvons nous contenter d'étudier celles qui sont dans le plan zox et qui sont représentées par l'équation

$$\frac{dx}{u} = \frac{dz}{w}, \tag{48}$$

u et w ayant les valeurs (47).

Comme on a d'autre part

$$x^2 = \frac{(\lambda + c^2)(\mu + c^2)}{c^2},$$

$$z^2 = \frac{-\lambda\mu}{c^2},$$

d'où

$$\frac{dx}{x} = \frac{(\mu + c^2)\,d\lambda + (\lambda + c^2)\,d\mu}{2(\lambda + c^2)(\mu + c^2)},$$

$$dz = -\frac{\mu\,d\lambda + \lambda\,d\mu}{2c\sqrt{-\lambda\mu}}.$$

L'équation (48) s'écrit, en éliminant x et z :

$$\frac{(\lambda + c^2)\,d\mu + (\mu + c^2)\,d\lambda}{c(\mu + c^2)} + \frac{\mu\,d\lambda + \lambda\,d\mu}{\sqrt{\lambda}\left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\lambda}}{c}(\lambda - \mu) - c\sqrt{\lambda}\right]} = 0,$$

ou encore

$$\left\{\sqrt{\lambda}(\lambda + c^2)\left[\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\lambda}}{c}\right)(\lambda - \mu) - c\sqrt{\lambda}\right] + c\lambda(\mu + c^2)\right\} d\mu$$

$$+ (\mu + c^2)\left[\sqrt{\lambda}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\lambda}}{c}\right)(\lambda - \mu) - c\lambda + c\mu\right] d\lambda = 0$$

qui devient, après simplification et division par le facteur $\lambda - \mu$,

$$\frac{d\mu}{\mu + c^2} = -\frac{\sqrt{\lambda}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\lambda}}{c}\right) - c}{\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\lambda}}{c}\right)\sqrt{\lambda}(\lambda + c^2) - c\lambda}\,d\lambda.$$

Or, on a

$$\sqrt{\lambda}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\lambda}}{c}\right) - c = \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\lambda}}{c}\right)\sqrt{\lambda}(\lambda + c^2) - c\lambda - c^3)}{\lambda + c^2};$$

donc

$$\frac{d\mu}{\mu + c^2} = -\frac{d\lambda}{\lambda + c^2} + \frac{c^3\,d\lambda}{(\lambda + c^2)\left[\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\lambda}}{c}\right)\sqrt{\lambda}(\lambda + c^2) - c\lambda\right]},$$

d'où

$$\log(\mu+c^2)(\lambda+c^2)=\int\frac{c^2\,d\lambda}{(\lambda+c^2)\left[\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\lambda}}{c}\right)\sqrt{\lambda}\,(\lambda+c^2)-c\lambda\right]}.$$

Posons

$$\lambda=c^2\operatorname{tg}^2\alpha,$$
$$d\lambda=2c^2\operatorname{tg}\alpha(1+\operatorname{tg}^2\alpha)\,d\alpha,$$

l'intégrale ci-dessus devient :

$$\int\frac{2d\alpha}{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)(1+\operatorname{tg}^2\alpha)-\operatorname{tg}\alpha}=\int\frac{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\frac{\pi}{2}-\alpha-\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$$
$$=\int\frac{1+\cos 2\alpha}{\pi-2\alpha-\sin 2\alpha}\,d(2\alpha);$$

en posant encore

$$\pi-2\alpha=\gamma,$$

il vient

$$\log(\mu+c^2)(\lambda+c^2)=-\int\frac{1-\cos\gamma}{\gamma-\sin\gamma}\,d\gamma=-\log(\gamma-\sin\gamma),$$
$$=-\log\left[\pi-2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\lambda}}{c}-\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\lambda}}{c}\right)\right],$$
$$=-\log\left[\pi-2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\lambda}}{c}-\frac{2c\sqrt{\lambda}}{c^2+\lambda}\right].$$

Les lignes de courant ont donc pour équation

$$(\mu+c^2)\left[\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\lambda}}{c}\right)(\lambda+c^2)-c\sqrt{\lambda}\right]=C, \tag{49}$$

C étant une constante arbitraire.

La ligne de courant qui part de l'origine correspond à $C=0$. Le facteur

$$\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\lambda}}{c}\right)(\lambda+c^2)-c\sqrt{\lambda}$$

ne s'annule jamais, car, au facteur $\frac{\lambda+c^2}{2}$ près, on peut l'écrire

$$\pi-2\alpha-\sin(\pi-2\alpha)<0.$$

Cette ligne de courant a donc pour équation

$$\mu + c^2 = 0,$$

c'est dire qu'elle est confondue avec l'axe oz.

Considérons maintenant une ligne de courant quelconque; soient

$$x_0 < c, \qquad x_1 > c,$$

les abscisses des points M_0 et M_1, où elle rencontre ox.

On a

$$x^2_0 = \mu_0 + c^2, \qquad \lambda_0 = 0,$$
$$x^2_1 = \lambda_1 + c^2, \qquad \mu_1 = 0,$$

d'où, en vertu de l'équation (49),

$$\frac{\pi}{2} c^2 x^2_0 = C = c^2 \left[\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2_1 - c^2}}{c} \right) x^2_1 - c\sqrt{x^2_1 - c^2} \right].$$

En posant

$$c = x_1 \cos \varphi$$

il vient

$$x^2_0 = \frac{2}{\pi} x^2_1 \left[\frac{\pi}{2} - \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right];$$

par exemple, pour

$$x_1 = 2c, \qquad \varphi = \frac{\pi}{3}, \qquad \sin 2\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

on a

$$x_0 = 0{,}05\, c \text{ environ.}$$

Cet exemple montre que le point M_0 se rapproche *très rapidement* du point o lorsque le point M_1 s'éloigne du bord de la pièce (*fig. 13*).

La tangente au point M_0 a pour coefficient angulaire (équations (47))

$$\left(\frac{w}{u}\right)_{\lambda=0} = \pi \frac{\sqrt{-\mu_0}}{2x_0} = \pi \frac{\sqrt{c^2 + x^2_0}}{2x_0}$$

et la tangente au point M_1 est verticale, car $\left(\frac{w}{u}\right)_{\mu=0} = \infty$.

Comme $\frac{w}{u}$ reste fini et continu entre ces limites, la courbe a, dans sa partie située à droite de oz, la forme représentée par la figure 13.

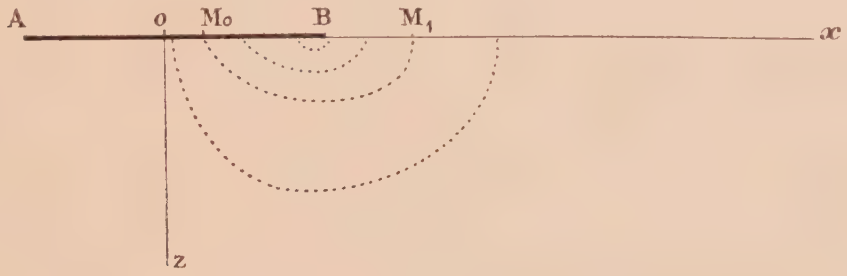


FIG. 13.

Le maximum de z correspond à $w = 0$, c'est-à-dire

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\lambda}}{c} - \frac{c\sqrt{\lambda}}{\lambda - \mu} = 0,$$

λ et μ étant liés par la relation

$$(\mu + c^2)\left[(\lambda + c^2)\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\lambda}}{c}\right) - c\sqrt{\lambda}\right] = \frac{\pi}{2}c^2x_0^2. \tag{50}$$

Éliminant μ entre ces deux équations, on trouve, par une réduction facile,

$$\frac{\left[(\lambda + c^2)\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\lambda}}{c} - c\sqrt{\lambda}\right)\right]^2}{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\lambda}}{c}} = \frac{\pi}{2}c^2x_0^2. \tag{51}$$

D'après l'équation (50), lorsque $\mu + c^2$ croît de o à $+c^2$, le facteur

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\lambda}}{c} - \frac{c\sqrt{\lambda}}{c^2 + \lambda}$$

décroît par valeurs positives. Mais la dérivée de cette expression est égale à $-d\lambda$, à un facteur positif près ; donc, sur une ligne de courant, λ va toujours croissant de zéro à l'infini.

Dans ces conditions, le premier membre de l'équation (51) est positif et décroissant; il ne passe donc qu'une fois par la valeur $\frac{\pi}{2}c^2x_0^2$.

La forme de la courbe est donc, à ce point de vue, celle que représente la figure 13.

§ 7. — Énergie cinétique du liquide (1).

Par définition, l'énergie cinétique du liquide s'exprime par l'intégrale triple, étendue à toute la masse du liquide,

$$\mathcal{E} = \int (u^2 + v^2 + w^2)\, dm$$

qu'on peut écrire, en vertu des équations (26),

$$\mathcal{E} = \rho \int\int\int \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)^2 \right] dx\,dy\,dz .$$

Comme $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial P}{\partial z}$ tendent rapidement vers zéro quand le point x, y, z s'éloigne de l'origine, nous pouvons appliquer utilement la formule de Green au volume d'une demi-sphère de rayon très grand limitée par le plan xOy, ce qui donne

$$\mathcal{E} = \int\int P \frac{\partial P}{\partial z}\, dx\, dy .$$

En admettant que la fonction P et ses dérivées s'annulent assez rapidement à l'infini pour que l'intégrale relative à la surface de la demi-sphère tende vers zéro quand son rayon augmente, on peut dire que la percussion P est nulle sur toute la surface S, sauf à l'intérieur d'un cercle (c),

$$(c) \begin{cases} x^2 + y^2 - c^2 = 0, \\ z = 0, \end{cases}$$

où on a

$$\frac{\partial P}{\partial n} = W_n ,$$

$$P = \frac{2W_n}{\pi} \sqrt{c^2 - x^2 - y^2},$$

$$\int\int P\, dx\, dy = \Pi = \frac{4}{3} c^3 W_n .$$

(1) Dans ce paragraphe, je n'ai pu que suivre de très près les développements de l'article déjà cité de M. H. Vergne. Bien que la forme du corps qui tombe sur le liquide soit différente, les résultats intrinsèques sont peu différents, comme M. Vergne l'avait fort bien prévu et annoncé.

Donc

$$\mathcal{E} = \frac{4}{3}\rho c^3 W_0^2, \tag{52}$$

c'est-à-dire, en vertu de l'équation (45), rendue homogène par l'introduction de ρ au second membre,

$$\mathcal{E} = MW_0(W - W_0). \tag{53}$$

Soient MW^2, MW_0^2, la force vive de la pièce avant et après le choc; on aura

$$\frac{\mathcal{E}}{MW^2} = \frac{W_0}{W}\left(1 - \frac{W_0}{W}\right),$$

$$\frac{\mathcal{E}}{MW_0^2} = \frac{W}{W_0} - 1.$$

En se rappelant l'équation (46),

$$\frac{W_0}{W} = \frac{1}{1 + \frac{4}{3\pi}\frac{c}{e}\frac{d}{\rho}}, \tag{46}$$

on voit que ces deux quotients sont indépendants de W et, par suite, de la hauteur de chute de la pièce. Le premier est maximum quand

$$\frac{W_0}{W} = 1 - \frac{W_0}{W} = \frac{1}{2},$$

c'est-à-dire quand

$$\frac{c}{e}\cdot\frac{\rho}{d} = \frac{3\pi}{4}.$$

Donc, la fraction de l'énergie de la pièce de monnaie qui est transmise au liquide sous forme d'énergie cinétique est maximum lorsque l'on a

$$\frac{c}{e}\cdot\frac{e}{d} = \frac{3\pi}{4}.$$

Le second rapport est égal à $\frac{4}{3\pi}\frac{c}{e}\frac{\rho}{d}$.

Ces remarques confirment l'expérience de tous les jours au sujet des éclaboussements. Ils sont d'autant plus importants, pour un objet plat, *de masse donnée*, que cet objet est plus large et moins épais.

§ 8. — Cas d'un objet long et étroit.

La méthode que nous venons d'employer s'applique aussi au cas d'un objet long et étroit (poutre, planche) tombant dans l'eau verticalement et à plat. On retrouve alors des résultats déjà connus.

Nous prendrons un système d'axes $oxyz$, oz vertical dirigé vers le bas, ox perpendiculaire et oy parallèle à la grande dimension de l'objet (*fig. 14*).

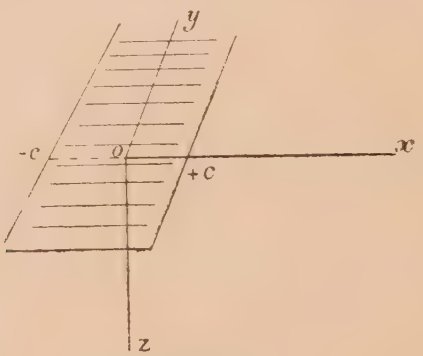


Fig. 14.

Dans les plans parallèles à xoz, nous considérerons les coniques

$$\frac{x^2}{c^2+\lambda}+\frac{z^2}{\lambda}-1=0, \tag{54}$$

$2c$ étant la largeur de l'objet; et nous définirons chaque point de l'espace par son ordonnée y et par les paramètres λ et μ des deux coniques (54) qui passent par ce point.

Soit $Q(\lambda,\mu)$ ce que devient la percussion P, exprimée au moyen de ces paramètres. On trouve

$$\Delta P = 2\lambda(c^2+\lambda)\frac{\partial^2 Q}{\partial\lambda^2}-2\mu(c^2+\mu)\frac{\partial^2 Q}{\partial\mu^2}+(c^2+2\lambda)\frac{\partial Q}{\partial\lambda}-(c^2+2\mu)\frac{\partial Q}{\partial\mu}=0.$$

Si on pose

$$Q(\lambda,\mu)=f(\lambda).\varphi(\mu)$$

cette équation se décompose en deux équations différentielles :

$$2\lambda(c^2+\lambda)f''+(c^2+2\lambda)f'-Ef=0,$$
$$2\mu(c^2+\mu)\varphi''+(c^2+2\mu)\varphi''-E\varphi=0.$$

Par un calcul très facile, analogue à celui que nous avons déjà fait au paragraphe 3, on trouve

$$Q = \frac{W_0}{c}\left(\sqrt{\lambda + c^2} - \sqrt{\lambda}\right)\sqrt{-\mu} = c\,W_0(Ch\lambda_1 - Sh\lambda_1)\sin\mu_1.$$

Le théorème des quantités de mouvement donne, en appelant l la longueur de l'objet,

$$-M(W_0 - W) = l\int_{-c}^{+c} Q_0\,dx$$

avec

$$Q_0 = W_0\sqrt{-\mu} = W_0\sqrt{c^2 - x^2}$$

d'où

$$-M(W_0 - W) = \frac{\pi l c^2}{2}W_0.$$

Comme ici

$$M = 2lced$$

on a finalement :

$$W_0 = \frac{W}{1 + \frac{\pi}{4}\frac{c}{e}\frac{\rho}{d}}.$$

La distribution des vitesses est donnée par les équations

$$u = c\,W_0\sqrt{\frac{-\mu}{\lambda + c^2}}\,\frac{x}{\lambda - \mu},$$

$$w = -W_0\left(\frac{\sqrt{\lambda(\lambda + c^2)}}{\lambda - \mu} - 1\right),$$

et les lignes de courant à l'instant τ ont pour équation différentielle

$$\frac{dx}{c\sqrt{\frac{-\mu}{c^2 + \lambda}}\,x} = \frac{-dz}{\sqrt{\lambda(c^2 + \lambda)} - (\lambda - \mu)}$$

d'où nous tirons, par un calcul facile,

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda(c^2 + \lambda)}} = \frac{d\mu}{c^2 + \mu}.$$

Pour résoudre cette équation, posons

$$\lambda = c^2 \operatorname{tg}^2 \alpha$$

nous trouvons

$$(c^2 + \mu) \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = C$$

ou encore, en posant

$$\lambda = c^2 \operatorname{Sh}^2 \lambda_1,$$
$$\mu = c^2 \sin^2 \mu_1,$$
$$\cos \mu_1 = C_1 e^{\lambda_1}.$$

Ces courbes ont la même forme que celles que nous avons étudiées au paragraphe 6 et qui sont représentées sur la figure 13.

L'énergie cinétiqne se calcule et s'étudie comme au paragraphe 7 et on trouve des résultats tout à fait analogues.

§ 9. — Remarque sur le ricochet.

Nous venons d'étudier la chute verticale d'une pièce de monnaie sur la surface d'un liquide. L'expérience montre que si cette même pièce arrive à la surface sous une incidence très faible, elle ne pénètre pas, mais rebondit.

La percussion reçue par le liquide a été la même, compte tenu de la composante verticale W de la vitesse V du projectile, et tout ce que nous avons dit précédemment sur les percussions de pression et l'énergie cinétique du liquide reste vrai.

Mais nous avons supposé que la percussion finissait à l'instant τ où la vitesse W avait atteint la valeur W_0, égale à celle des particules liquides au contact. Or, pour des valeurs suffisamment petites de W, le déplacement vertical de la pièce pendant la percussion est si faible que la surface du liquide n'est pas *crevée*, mais seulement *déprimée*.

Dès lors, à la percussion envisagée plus haut succède une deuxième percussion qui tend à diminuer encore la vitesse W, jusqu'à changer son signe. Cette percussion est due à deux forces, dont l'une n'intervenait pas dans la précédente étude : c'est la tension superficicielle du liquide qui tend à rendre à celui-ci sa forme primitive, en restituant le travail absorbé par l'augmentation de l'aire de la surface.

Nous avons au contraire implicitement tenu compte des forces d'élasticité de la couche liquide très mince qui, refoulée par la pièce de monnaie, a été comprimée

avant l'instant τ. En effet, cette couche avait une vitesse inférieure à W_0, tandis que la pièce de monnaie avait une vitesse supérieure à W_0. Ces forces élastiques produisent un travail négatif avant l'instant τ et ensuite un travail positif. Nous en avons tenu compte d'une façon globale en supposant que la couche liquide n'avait pas été comprimée.

Les constantes physiques relatives à la tension superficielle et à l'élasticité des liquides sont mal connues et les calculs que nous tenterions reposeraient sur des données bien fragiles, mais nous pouvons affirmer que les considérations ci-dessus justifient le ricochet et permettent de prévoir quelles circonstances le faciliteront.

Nous avons déjà vu qu'il exigeait une vitesse verticale W très faible. Mais la percussion qui le produit doit être très forte; il faut donc une grande vitesse V. On pourra satisfaire à ces conditions en lançant le projectile avec force, dans une direction horizontale, d'un point situé près de la surface du liquide.

Enfin le ricochet sera facilité si le liquide est doué d'une forte tension superficielle et d'une faible compressibilité.

TROISIÈME PARTIE

ÉCOULEMENT D'UN LIQUIDE A TRAVERS UN TUBE DE BORDA

Nous avons étudié, dans la première partie de ce travail, les accélérations initiales que prennent les diverses particules d'un liquide au repos dans un vase lorsqu'un orifice est brusquement ouvert dans la paroi de ce vase.

La répartition des vitesses, dans le même liquide considéré au moment où son mouvement d'écoulement est devenu permanent, a été étudiée, dès 1908, par M. U. Cisotti (*Rend. del Circ. di Palermo*, t. XXV, p. 179), qui en a donné une solution explicite dans le cas d'un vase à deux dimensions de profil polygonal. Parmi les cas particuliers considérés, l'un des plus intéressants est celui du vase à cinq côtés, dont le profil présente la forme connue sous le nom de « tube de Borda » (*fig. 15*).

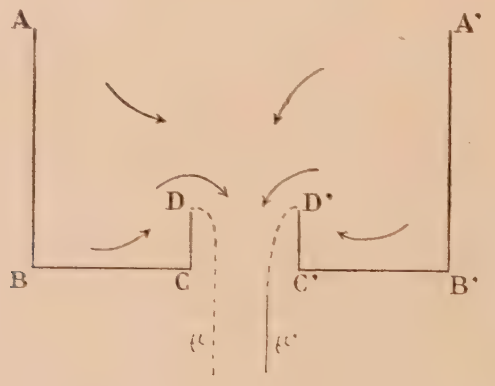


Fig. 15.

Depuis lors, M. H. Villat, donnant une nouvelle extension à la notion de surface de discontinuité à l'intérieur d'un fluide en mouvement, a montré l'existence de solutions multiples dans de nombreux problèmes d'hydrodynamique; la question se pose de savoir si la solution donnée par M. U. Cisotti est la seule.

M. Cisotti a noté que la vitesse au fond du vase est pratiquement nulle lorsque la hauteur du tube orifice est assez grande par rapport à la largeur du vase. Le mouvement d'écoulement peut être représenté par le schéma ci-dessous, les parties hachurées étant des zones de fluide au repos ou en état de mouvement tourbillonnaire lent.

Proposons-nous de déterminer les points P et Q et la forme des lignes λ et μ (*fig. 16*).

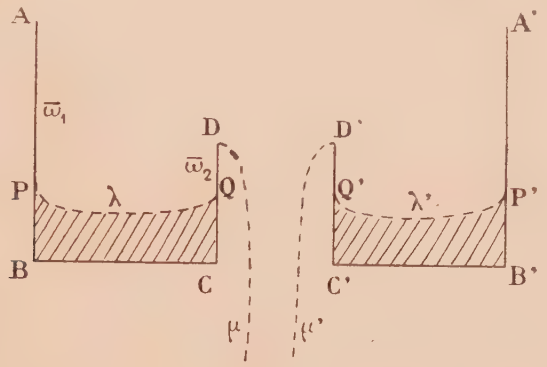


Fig. 16.

En appliquant le principe des images, nous pouvons supposer une cloison fluide X'X, coupant le vase en deux portions symétriques, et étudier seulement l'une des portions.

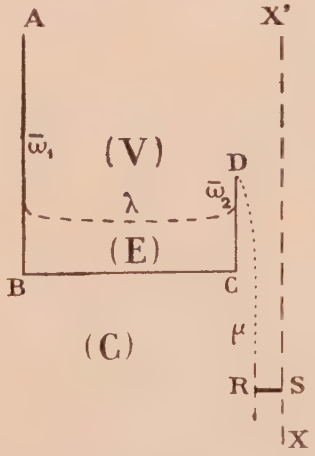


Fig. 17.

Négligeons l'action du liquide situé très haut dans le vase.

Le demi-plan est divisé en trois domaines :

(V) liquide en mouvement;

(E) liquide en repos;

(C) fluide en repos, sous la pression constante p_0.

Nous supposons le liquide incompressible, de densité 1, sa vitesse à l'infini dans le jet égale à l'unité.

Nous rapportons le demi-plan de la figure 17 à un système d'axes rectangulaires, ox suivant X'X, oy faisant un angle $+\frac{\pi}{2}$ avec ox, et nous posons

$$z = x + iy,$$

$$\frac{dx}{ds} = \frac{u}{V}, \qquad \frac{dy}{ds} = \frac{v}{V};$$

V étant la vitesse du point d'affixe z.

Soient φ et ψ le potentiel des vitesses et la fonction de courant.

$$f = \varphi + i\psi.$$

Nous supposons qu'au point D

$$f = 0$$

et nous posons

$$\frac{df}{dz} = u - iv = w$$

d'où les conditions :

1° A l'infini dans le jet

$$\lim. u = 1, \qquad \lim. v = 0, \qquad \lim. |f| = \infty;$$

2° Sur la ligne de courant $\omega_1\lambda\omega_2\mu$

$$\psi = 0;$$

3° Sur la ligne de courant X'X

$$\psi = \psi_1 \text{ (constante à déterminer)};$$

4° Dans tout le domaine (V)

$$p = p_0 + \frac{1}{2}(1 - V^2).$$

On devra donc avoir en tout point $V \leqslant 1$; en particulier sur μ on aura $V = 1$, et, sur λ, $V = e^{-a}$ $(a > 0)$;

5° Le flux à travers une section normale du jet, assez éloigné du vase, est mesuré par la largeur RS, et comme on a

$$\text{flux} = \int u\,dy = \int \frac{\partial \psi}{\partial y}\,dy = \psi_1,$$

nous choisissons $\psi_1 = \frac{\pi}{2}$ en fixant l'unité de longueur en conséquence.

Le domaine (V) du plan z est représenté conformément sur le domaine (B) du plan f (*fig. 18*) par la relation

$$f = \varphi + i\psi.$$

On sait que $\frac{dz}{df}$ est une fonction analytique de f dans le domaine (B) et que le problème revient à la détermination de cette fonction.

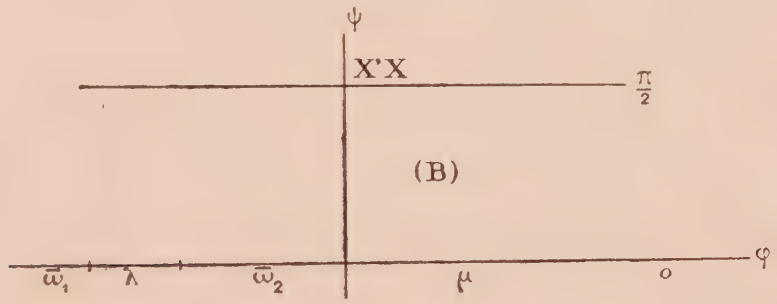


FIG. 18.

On pose

$$w = e^{-\Omega},$$
$$\Omega = \Theta + i\mathrm{T};$$

d'où

$$\mathrm{V} = e^{\mathrm{T}},$$
$$\frac{u + iv}{\mathrm{V}} = e^{i\Theta}.$$

Pour déterminer Ω, représentons le domaine (B) sur un domaine rectangulaire par les relations (55), (56), (57) ci-dessous :

$$f = \frac{1}{2}\log s. \tag{55}$$

Plan S

Fig. 19.

$$u = \frac{-s+m}{4}, \qquad \left(m = \frac{q+p+1}{3}\right), \tag{56}$$

Plan U

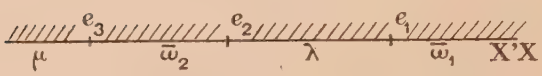


Fig. 20.

et, en posant

$$\begin{cases} e_1 = \dfrac{-p+m}{4}, \\ e_2 = \dfrac{-q+m}{4}, \\ e_3 = \dfrac{-1+m}{4}, \end{cases} \tag{56 bis}$$

$$dZ = \frac{du}{-\sqrt{4(u-e_1)(u-e_2)(u-e_3)}}, \tag{57}$$

c'est-à-dire $u = pZ$.

Plan Z

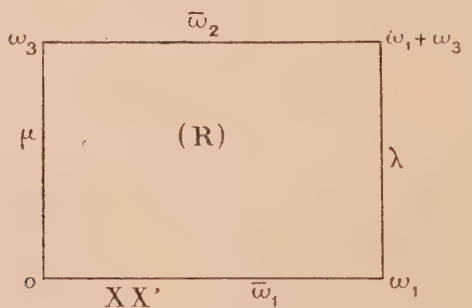


Fig. 21.

Il en résulte finalement que la relation

$$2f = \operatorname{Log}\left[1 - 4(pZ - e_3)\right] \tag{58}$$

fait correspondre point par point le domaine (B) du plan f au domaine (R) du plan Z.

Reste à construire la fonction $\Omega(Z)$.

Sur les côtés successifs du rectangle R, parcouru en laissant à gauche le domaine (R), nous avons

$$\theta = 0, \qquad T = -a, \qquad \theta = \pi, \qquad T = a;$$

d'où (H. Villat, *Acta Mathematica*, t. XL, p. 156)

$$\Omega(Z) = -i\int_0^{\omega_1}\left[\zeta_3(Z-t)+\zeta_3(Z+t)\right]dt + \frac{ai}{\pi}\int_0^{\frac{\omega_3}{i}}\left[\zeta_1(Z-it)+\zeta_1(Z+it)\right]dt$$

avec la condition d'uniformité

$$-\pi\int_0^{\omega_1} dt = -a\int_0^{\frac{\omega_3}{i}} dt$$

ce qui donne

$$a = \frac{i\omega_1}{\omega_3}\pi > 0, \tag{59}$$

$$\Omega(Z) = \frac{Z}{\omega_3}\pi.$$

On a donc

$$\frac{df}{dz} = e^{-i\Omega(z)} = e^{-i\frac{\pi}{\omega_3}z} \tag{60}$$

avec

$$2f = \operatorname{Log}\left[1 - 4(pZ - e_3)\right]. \tag{58}$$

Le problème revient à la détermination de ω_1 et de ω_3. Car ces valeurs permettent de calculer e_1, e_2, e_3 et, par leur intermédiaire, p et q (équations 56 *bis*). Si nous nous reportons à l'équation (55), nous voyons que les points P et Q sont alors connus si on a déterminé la fonction $f(z)$. Or celle-ci sera elle-même connue si on a ω_1 et ω_3, car nous avons ainsi la représentation de (V) sur (R) et par conséquent sur (B).

Mais ω_1 et ω_3 sont indéterminés, ou plutôt leur rapport τ est indéterminé, car il est évident que le rapport seul des dimensions du rectangle (R) intervient dans la représentation conforme, et aucune condition ne nous permet de le déterminer.

Le problème tout entier reste indéterminé, et nous avons une solution bien définie, physiquement acceptable, pour chaque valeur que nous donnerons *arbitrairement* au module τ des fonctions elliptiques introduites.

A chaque solution correspondra une position des points P et Q et une configuration de la ligne λ qui les joint. Lorsque la ligne λ viendra toucher entre B et C la paroi inférieure du vase, le problème ne pourra plus être mis en équations par le même procédé, car il ne sera pas possible de masser l'ensemble des parois solides sur deux segments seulement de la frontière.

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

Dépression instantanée dans un liquide.

Pages.

I. Formules générales 7
II. Étude de l'accélération près des bords de l'orifice 16
III. Étude d'un cas particulier 24
IV. Étude particulière de la dépression 31

DEUXIÈME PARTIE

Compression instantanée dans un liquide.

I. Position du problème 42
II. Recherche de la percussion 45
III. Intégration de l'équation de Laplace 47
IV. Calcul de W_0 50
V. Vitesses après le choc 52
VI. Lignes de courant 53
VII. Énergie cinétique du liquide 58
VIII. Cas d'un objet long et étroit 60
IX. Remarque sur le ricochet 62

TROISIÈME PARTIE

Écoulement d un liquide à travers un tube de Borda 64

SECONDE THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

La mécanique analytique et les équations de M. Paul Appell.

VU ET PERMIS D'IMPRIMER :

Strasbourg, le 14 janvier 1925.

Le Recteur d'Académie, Directeur général de l'Instruction publique et des Beaux-Arts,

S. CHARLETY.

VU ET APPROUVÉ :

Strasbourg, le 9 janvier 1925.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

P.-Th. MULLER.

TOULOUSE. — IMPR. ET LIBR. ÉDOUARD PRIVAT. — 7086